1 Struktury algebraiczne

1.1 Grupa

Definicja 1.1 Działaniem w zbiorze niepustym A nazywamy każde odwzorowanie
$$f : A \times A \to A.$$

Definicja 1.2 Działanie $\circ$ określone w zbiorze A jest łączne, jeżeli
$$\forall_{a,b,c\in A} \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Definicja 1.3 Działanie $\circ$ określone w zbiorze A jest przemienne, jeżeli
$$\forall_{a,b\in A} \quad a \circ b = b \circ a.$$

Definicja 1.4 Element $e \in A$ nazywa się elementem neutralnym działania $\circ$, jeżeli
$$\forall_{a\in A} \quad a \circ e = e \circ a = a.$$

Definicja 1.5 Niech działanie $\circ$ określone w zbiorze A posiada element neutralny e. Element $a' \in A$ nazywamy elementem odwrotnym do elementu $a \in A$, jeżeli
$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Definicja 1.6 Zbiór V, w którym określone jest działanie $\circ$, nazywamy grupą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. działanie $\circ$ jest łączne
2. istnieje element neutralny $e \in V$ działania $\circ$
3. dla każdego $a \in V$ istnieje element odwrotny

Definicja 1.7 Grupa, w której działanie jest przemienne, nazywa się grupą abelową (przemienną).

1.2 Ciało

Definicja 1.8 Niech dany będzie zbiór A z dwoma działaniami $\oplus, \odot$. Mówimy, że działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$, jeżeli

$$\forall_{a,b,c \in A} \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \wedge$$

$$\wedge (b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$$

Definicja 1.9 Zbiór V, w którym określone są dwa działania $\oplus, \odot$, nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. V jest grupą abelową względem działania $\oplus$
2. $V \setminus \{e_\oplus\}$ jest grupą względem działania $\odot$
3. działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$

2 Ciało liczb zespolonych

Definicja 2.1 Rozważmy zbiór $C = R \times R$. W zbiorze C określamy dwa działania $\oplus, \odot$, które będziemy nazywali dodawaniem i mnożeniem:

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$,

gdzie działania po prawych stronach równości są zwykłymi działaniami na liczbach rzeczywistych. Elementy zbioru C, w którym określone są działania $\oplus, \odot$, będziemy nazywali liczbami zespolonymi, a zbiór C zbiorem liczb zespolonych.

Twierdzenie 2.1 Zbiór liczb zespolonych jest ciałem względem działań $\oplus, \odot$.

Definicja 2.2 Niech $z = a + bi$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Liczbę sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = a - bi$.

Twierdzenie 2.2

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$.

Definicja 2.3 Niech $z = a + bi$. Modułem liczby zespolonej z, który oznaczamy przez $|z|$, nazywamy liczbę rzeczywistą $\sqrt{a^2 + b^2}$

Twierdzenie 2.3 Niech

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

oraz

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Wówczas

1. $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,
   tzn. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ oraz $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$,
   tzn. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ oraz $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Definicja 2.4 (wzór de Moivre'a)

$$[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Definicja 2.5 Niech $n \in N$. Pierwiastkiem stopnia n liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w o tej własności, że

$$w^n = z$$

Twierdzenie 2.4 Każda różna od zera liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n postaci:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Twierdzenie 2.5 Jeżeli w_k, gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$, są pierwiastkami stopnia n z liczby z, to

$$w_k = w_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

3 Funkcje liczbowe

Definicja 3.1 Niech zbiory $X, Y \subset R$ będą niepuste. Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$ i oznaczamy przez

$$f : X \longrightarrow Y$$

Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja 3.2 Niech $f : X \longrightarrow Y$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy symbolem D_f. Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f a zbiór

$$\left\{y \in Y : \exists_{x \in D_f} \quad y = f(x)\right\}$$

nazywamy zbiorem jej wartości.

Definicja 3.3 Funkcje $f : D_f \longrightarrow Y$ oraz $g : D_f \longrightarrow Y$ są równe, jeżeli

$$D_f = D_g \quad \wedge \quad \forall_{x \in D_f} \quad f(x) = g(x)$$

Definicja 3.4 Wykresem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\left\{(x, y) \in R^2 : x \in X, y = f(x)\right\}$$

Definicja 3.5 Funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, jeżeli

$$\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad f(x) = y.$$

Piszemy wtedy $f : X \xrightarrow{na} Y$.

Definicja 3.6 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy okresową, jeżeli

$$\exists_{T>0} \quad \forall_{x \in X} \quad x + T \in X \quad \wedge \quad f(x + T) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji f. Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji f, to nazywamy go okresem podstawowym.

Definicja 3.7 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy parzystą, jeżeli

$$\forall_{x\in X} \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$$

Definicja 3.8 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy nieparzystą, jeżeli

$$\forall_{x\in X} \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$$

Definicja 3.9 Funkcja f jest ograniczona z dołu na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{m\in R} \quad \forall_{x\in A} \quad f(x) \geq m.$$

Definicja 3.10 Funkcja f jest ograniczona z góry na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{M\in R} \quad \forall_{x\in A} \quad f(x) \leq M.$$

Definicja 3.11 Funkcja f jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{m,M\in R} \quad \forall_{x\in A} \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Definicja 3.12 Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)] \,.$$

Definicja 3.13 Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)] \,.$$

Definicja 3.14 Funkcja f jest niemalejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)] \,.$$

Definicja 3.15 Funkcja f jest nierosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)] .$$

Definicja 3.16 Niech $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Z \longrightarrow W$, gdzie $Y \subset Z$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \longrightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Definicja 3.17 Funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] .$$

Definicja 3.18 Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcje odwrotną do funkcji f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ spełniającą warunek:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

gdzie $x \in X, y \in Y$.

Twierdzenie 3.1 Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Wtedy

$$\forall_{x \in X} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y \in Y} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Definicja 3.19

1. Funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy *arcus sinus* i oznaczamy przez arcsin.
2. Funkcję odwrotną do funkcji cosinus obciętej do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ nazywamy *arcus cosinus* i oznaczamy przez arccos.
3. Funkcję odwrotną do funkcji tangens obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy *arcus tangens* i oznaczamy przez arctg.
4. Funkcję odwrotną do funkcji cotangens obciętej do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ nazywamy *arcus cotangens* i oznaczamy przez arcctg.

4 Ciągi liczbowe

Definicja 4.1 Ciągiem nazywamy funkcję $f : N \longrightarrow R$. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej $n \in N$ będziemy nazywać n-tym wyrazem ciągu i oznaczać przez a_n, tzn. $f(n) = a_n$. Sam ciąg oznaczać będziemy symbolem (a_n).

Definicja 4.2 Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\exists_{m \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad a_n \geq m.$$

Definicja 4.3 Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli

$$\exists_{M \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad a_n \leq M.$$

Definicja 4.4 Ciąg (a_n) jest ograniczony, jeżeli

$$\exists_{m,M \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad m \leq a_n \leq M.$$

Definicja 4.5 Ciąg (a_n) jest rosnący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Definicja 4.6 Ciąg (a_n) jest malejący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n > a_{n+1}.$$

Definicja 4.7 Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Definicja 4.8 Ciąg (a_n) jest nierosnący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n \geq a_{n+1}.$$

4.1 Granica właściwa ciągu

Definicja 4.9 Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in R$, co zapisujemy

$$a_n \to a \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

jeżeli

$$\forall_{\epsilon>0} \quad \exists_{n_0\in N} \quad \forall_{n>n_0} \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Twierdzenie 4.1 Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są zbieżne do granicy właściwej, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, o ile $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Twierdzenie 4.2 Jeżeli ciąg jest zbieżny, to ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie 4.3 Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Twierdzenie 4.4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Twierdzenie 4.5

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Twierdzenie 4.6 Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz ciąg (b_n) jest ograniczony, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Twierdzenie 4.7 (o trzech ciągach) Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = b$,

to $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$.

Twierdzenie 4.8 Jeżeli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.

4.2 Granica niewłaściwa ciągu

Definicja 4.10 Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwej ∞ (odpowiednio do $-\infty$), co zapisujemy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad (\text{odp.} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty),$$

jeżeli

$$\forall_{A \in R} \quad \exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n > n_0} \quad a_n > A$$
$$(\text{odp.} \quad \forall_{A \in R} \quad \exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n > n_0} \quad a_n < A)$$

Twierdzenie 4.9 Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \leq b_n$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ (odpowiednio $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$)

to $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$ (odp. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$)

Definicja 4.11 Wyrażenia

$$[\infty - \infty]\,, [0 \cdot \infty]\,, \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [1^\infty]\,, [0^0]\,, [\infty^0]$$

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

4.3 Granice pewnych ciągów

Twierdzenie 4.10 Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony.

Twierdzenie 4.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, gdzie $e \approx 2,718281828459045$

Twierdzenie 4.12

$$\lim_{n\to\infty} a^n \begin{cases} = 0 & \text{dla } a \in (-1,1) \\ = 1 & \text{dla } a = 1 \\ = \infty & \text{dla } a \in (1,\infty) \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } a \in (-\infty,-1\rangle \end{cases}$$

Twierdzenie 4.13

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a \geq 0$

5 Granice funkcji

5.1 Podstawowe definicje

Definicja 5.1

1. Sąsiedztwem lewostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
2. Sąsiedztwem prawostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
3. Sąsiedztwem punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Definicja 5.2

1. Sąsiedztwem ∞ nazywamy przedział $S(\infty) = (a, \infty)$ dla dowolnego $a \in R$.
2. Sąsiedztwem $-\infty$ nazywamy przedział $S(-\infty) = (-\infty, a)$ dla dowolnego $a \in R$.

Definicja 5.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 5.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa lewostronnego $S_-(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S_-(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 5.5 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa prawostronnego $S_+(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S_+(x_0)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 5.6 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

Definicja 5.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą $-\infty$ w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Twierdzenie 5.1 Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji f.

Twierdzenie 5.2 Jeżeli

1. $\lim_{n\to\infty} x'_n = x_0$, gdzie $x'_n \neq x_0$ dla każdego $n \in R$, oraz $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$
2. $\lim_{n\to\infty} x''_n = x_0$, gdzie $x''_n \neq x_0$ dla każdego $n \in R$, oraz $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

Definicja 5.8 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w ∞, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 5.9 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(-\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(-\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 5.10 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

Twierdzenie 5.3 Jeżeli

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

5.2 Twierdzenia o granicach funkcji

Twierdzenie 5.4 Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdzie $c \in R$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Twierdzenie 5.5 Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0)$
3. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = q$

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = q$.

Twierdzenie 5.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Twierdzenie 5.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a > 0$

Twierdzenie 5.8 Jeżeli istnieje funkcja odwrotna do funkcji g w pewnym otoczeniu $S(x_0)$, to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to g(x_0)} f(g^{-1}(t))$$

5.3 Asymptoty funkcji

Definicja 5.11 Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

Definicja 5.12 Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

Definicja 5.13 Prosta jest asymptotą pionową obustronną funkcji, jeżeli jest asymptotą pionową prawostronną i lewostronną.

Definicja 5.14 Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Definicja 5.15 Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = b$$

Definicja 5.16 Prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Definicja 5.17 Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Twierdzenie 5.9 Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$

$$\left(a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]\right)$$

6 Ciągłość funkcji

6.1 Podstawowe definicje

Definicja 6.1

1. Otoczeniem lewostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$ dla dowolnego $\delta > 0$.
2. Otoczeniem prawostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O_+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
3. Otoczeniem punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Definicja 6.2 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 6.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia lewostronnego $O_-(x_0)$. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 6.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia prawostronnego $O_+(x_0)$. Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 6.5 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w x_0.

Definicja 6.6 Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 6.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość I rodzaju, jeżeli istnieją granice skończone $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Definicja 6.8 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość II rodzaju, jeżeli co najmniej jedna z granic $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ nie istnieje lub jest niewłaściwa.

6.2 Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie 6.1 Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to ciągłe są w punkcie x_0 także funkcje: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz funkcja $\frac{f}{g}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 6.2 Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$

to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie 6.3 Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

6.3 Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie 6.4 (Weierstrassa) Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to jest na tym przedziale ograniczona.

Twierdzenie 6.5 (Darboux) Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\forall_{w \in (f(a), f(b))} \quad \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = w$$

Wniosek 6.1 (Darboux) Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, to

$$\exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = 0$$

7 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

7.1 Podstawowe definicje

Definicja 7.1 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx zmiennej niezależnej, gdzie $\Delta x \neq 0$ oraz $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$, nazywamy liczbę

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 7.2 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 7.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego lewostronnego otoczenia $O_-(x_0)$. Pochodną lewostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 7.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego prawostronnego otoczenia $O_+(x_0)$. Pochodną prawostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Twierdzenie 7.1 Funkcja ma pochodna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Twierdzenie 7.2 Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

Definicja 7.5 Funkcja ma pochodną właściwą na zbiorze, jeżeli ma pochodna w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 7.6 Niech f będzie ciągła w punkcie x_0. Funkcja ma pochodną niewłaściwą w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

7.2 Twierdzenia o pochodnej funkcji

Twierdzenie 7.3 Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to

1. $[f + g]'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $[cf]'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie $c \in R$
3. $[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, o ile $g(x_0) \neq 0$

Twierdzenie 7.4 Jeżeli

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0
2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$

to

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Twierdzenie 7.5 Jeżeli funkcja f ma następujące własności:

1. jest ciągła w otoczeniu $O(x_0)$
2. jest malejąca lub rosnąca na otoczeniu $O(x_0)$
3. ma pochodną właściwą $f'(x_0)$

to

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{gdzie} \quad y_0 = f(x_0)$$

7.3 Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Definicja 7.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji f przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$, gdy $x \longrightarrow x_0$.

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Jeżeli α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i dodatnią półosią Ox, to

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

Jeżeli α_+ oraz α_- oznaczają odpowiednio kąty między prawą i lewą stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ a dodatnią półosią Ox, to

$$f'_+(x_0) = tg\alpha_+ \quad \text{oraz} \quad f'_-(x_0) = tg\alpha_-$$

Twierdzenie 7.6 Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

7.4 Różniczka funkcji

Definicja 7.8 Niech funkcja f ma pochodna właściwą w punkcie x_0. Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Twierdzenie 7.7 Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Błąd jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej niezależnej Δx, tzn.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$$

7.5 Pochodne wyższych rzędów

Definicja 7.9 Pochodną właściwą n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy rekurencyjnie:

1. $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$
2. $f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0)$ dla $n \geq 2$

Dodatkowo przyjmujemy, że $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Twierdzenie 7.8 (Leibniza) Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

7.6 Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 7.9 (Rolle'a) Jeżeli funkcja f:

1. jest ciągła na $[a, b]$
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0$$

Twierdzenie 7.10 (Lagrange'a) Jeżeli funkcja f

1. jest ciągła na $[a, b]$
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wnioski z tw. Lagrange'a

Wniosek 7.1 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) = 0,$$

to jest stała na przedziale (a, b).

Wniosek 7.2 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) > 0,$$

to jest rosnąca na przedziale (a, b).

Wniosek 7.3 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) < 0,$$

to jest malejąca na przedziale (a, b).

7.7 Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie 7.11 Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$
2. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

7.8 Rozwinięcie Taylora funkcji

Twierdzenie 7.12 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu $O(x_0)$ n-tą pochodną, to dla każdego $x \in O(x_0)$ istnieje punkt c taki, że zachodzi równość

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

gdzie $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

7.9 Ekstrema funkcji

Definicja 7.10 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ minimum lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x\in S(x_0)} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Definicja 7.11 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ maksimum lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x\in S(x_0)} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Definicja 7.12 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ minimum lokalne właściwe, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) > f(x_0)$$

Definicja 7.13 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ maksimum lokalne właściwe, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) < f(x_0)$$

Definicja 7.14 Liczba $m \in R$ jest najmniejszą wartością funkcji na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{x_0 \in A} \quad f(x_0) = m \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \geq m$$

Definicja 7.15 Liczba $M \in R$ jest największą wartością funkcji na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{x_0 \in A} \quad f(x_0) = M \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \leq M$$

Twierdzenie 7.13 (Fermata) Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. ma ekstremum lokalne w x_0
2. istnieje $f'(x_0)$

to

$$f'(x_0) = 0$$

Twierdzenie 7.14 Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których jej pochodna równa się zero albo w punktach, w których jej pochodna nie istnieje.

Twierdzenie 7.15 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f'(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f'(x) < 0$$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 7.16 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f'(x) < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f'(x) > 0$$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 7.17 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 7.18 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) > 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 7.19 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to w punkcie x_0 nie ma ekstremum lokalnego.

7.10 Punkty przegięcia funkcji

Definicja 7.16 Funkcja f jest wklęsła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$

zachodzi

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 7.17 Funkcja f jest wypukła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 7.18 Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 7.19 Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Twierdzenie 7.20 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f''(x) > 0,$$

to jest ściśle wypukła na przedziale (a, b).

Twierdzenie 7.21 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f''(x) < 0,$$

to jest ściśle wklęsła na przedziale (a, b).

Definicja 7.20 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Niech funkcja f ma pochodną na $O(x_0)$.

Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f, jeżeli istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że f jest ściśle wypukła na $S_-(x_0)$ oraz ściśle wklęsła na $S_+(x_0)$ albo odwrotnie.

Twierdzenie 7.22 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia
2. istnieje $f''(x_0)$

to

$$f''(x_0) = 0$$

Twierdzenie 7.23 Funkcja może mieć punkty przegięcia tylko w punktach, w których jej druga pochodna równa się zero albo w punktach, w których ta pochodna nie istnieje.

Twierdzenie 7.24 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = 0$
2. istnieją sąsiedztwa lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

   $$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f''(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f''(x) < 0$$

   lub

   $$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f''(x) < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f''(x) > 0$$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie 7.25 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie 7.26 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 4$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ nie jest punktem przegięcia funkcji f.

7.11 Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. Dziedzina funkcji.
2. Podstawowe własności funkcji:
   - parzystość lub nieparzystość
   - okresowość
   - punkty przecięcia wykresu z osiami Ox i Oy
   - ciągłość
3. Granice lub wartości funkcji na „końcach” dziedziny.
4. Asymptoty funkcji.
5. Pierwsza pochodna funkcji:
   - dziedzina pochodnej
   - przedziały monotoniczności funkcji
   - ekstrema funkcji
   - granice lub wartości funkcji na „końcach” dziedziny pochodnej
6. Druga pochodna funkcji:
   - dziedzina drugiej pochodnej
   - przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji
   - punkty przegięcia
7. Tabelka.
8. Wykres funkcji.