1 Struktury algebraiczne

1.1 Grupa

Definicja 1.1 Działaniem w zbiorze niepustym A nazywamy każde odwzorowanie
$$f : A \times A \to A.$$

Definicja 1.2 Działanie $\circ$ określone w zbiorze A jest łączne, jeżeli
$$\forall_{a,b,c \in A} \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Definicja 1.3 Działanie $\circ$ określone w zbiorze A jest przemienne, jeżeli
$$\forall_{a,b \in A} \quad a \circ b = b \circ a.$$

Definicja 1.4 Element $e \in A$ nazywa się elementem neutralnym działania $\circ$, jeżeli
$$\forall_{a \in A} \quad a \circ e = e \circ a = a.$$

Definicja 1.5 Niech działanie $\circ$ określone w zbiorze A posiada element neutralny e. Element $a' \in A$ nazywamy elementem odwrotnym do elementu $a \in A$, jeżeli
$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Definicja 1.6 Zbiór V, w którym określone jest działanie $\circ$, nazywamy grupą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. działanie $\circ$ jest łączne
2. istnieje element neutralny $e \in V$ działania $\circ$
3. dla każdego $a \in V$ istnieje element odwrotny

Definicja 1.7 Grupa, w której działanie jest przemienne, nazywa się grupą abelową (przemienną).

1.2 Ciało

Definicja 1.8 Niech dany będzie zbiór A z dwoma działaniami $\oplus, \odot$. Mówimy, że działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$, jeżeli

$$\forall_{a,b,c\in A} \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \wedge$$

$$\wedge (b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$$

Definicja 1.9 Zbiór V, w którym określone są dwa działania $\oplus, \odot$, nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. V jest grupą abelową względem działania $\oplus$
2. $V \setminus \{e_\oplus\}$ jest grupą względem działania $\odot$
3. działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$

2 Ciało liczb zespolonych

Definicja 2.1 Rozważmy zbiór $C = R \times R$. W zbiorze C określamy dwa działania $\oplus, \odot$, które będziemy nazywali dodawaniem i mnożeniem:

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$,

gdzie działania po prawych stronach równości są zwykłymi działaniami na liczbach rzeczywistych. Elementy zbioru C, w którym określone są działania $\oplus, \odot$, będziemy nazywali liczbami zespolonymi, a zbiór C zbiorem liczb zespolonych.

Twierdzenie 2.1 Zbiór liczb zespolonych jest ciałem względem działań $\oplus, \odot$.

Definicja 2.2 Niech $z = a + bi$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Liczbę sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = a - bi$.

Twierdzenie 2.2

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$.

Definicja 2.3 Niech $z = a + bi$. Modułem liczby zespolonej z, który oznaczamy przez $|z|$, nazywamy liczbę rzeczywistą $\sqrt{a^2 + b^2}$

Twierdzenie 2.3 Niech

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

oraz

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Wówczas

1. $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,
   tzn. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ oraz $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$,
   tzn. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ oraz $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Definicja 2.4 (wzór de Moivre'a)

$$[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Definicja 2.5 Niech $n \in N$. Pierwiastkiem stopnia n liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w o tej własności, że

$$w^n = z$$

Twierdzenie 2.4 Każda różna od zera liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n postaci:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Twierdzenie 2.5 Jeżeli w_k, gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$, są pierwiastkami stopnia n z liczby z, to

$$w_k = w_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

3 Macierze i wyznaczniki

Definicja 3.1 Niech K oznacza ciało, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkcja $A : M \times N \longrightarrow K$ nazywa się macierzą prostokątną (krótko macierzą) nad ciałem K o m wierszach i n kolumnach. Będziemy pisali macierz w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i oznaczali przez $[a_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $a_{ij} \in K$. Skalary a_{ij} nazywamy wyrazami lub elementami danej macierzy.

Definicja 3.2 Główną przekątną macierzy $[a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy ciąg elementów $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ss})$, gdzie $s = \min\{m, n\}$.

Definicja 3.3 (*rodzaje macierzy*)

1. Macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0, nazywamy macierzą zerową wymiaru $m \times n$ i oznaczamy przez $\mathrm{O}_{m\times n}$ lub O, gdy znamy jej wymiar.

$$\mathrm{O}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

2. Macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0, nazywamy macierzą dolnotrójkątną. Podobnie określa się macierz górnotrójkątną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, będąca jednocześnie macierzą dolnotrójkątną jak i górnotrójkątną, nazywana jest macierzą diagonalną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Macierz diagonalną, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy przez I_n lub I, gdy znamy jej stopień.

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Działania na macierzach

Definicja 3.4 Dodawaniem macierzy nazywamy działanie w zbiorze $M_{m \times n}(K)$ określone w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tak więc $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Twierdzenie 3.1 Zbiór $M_{m\times n}(K)$ z dodawaniem macierzy jest grupą abelową.

Definicja 3.5 Mnożeniem macierzy przez skalar nazywamy działanie zewnętrzne

$$\cdot : K \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

określone w następujący sposób:

$$\lambda \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\lambda \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Zatem

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definicja 3.6 Niech będą dane dwie macierze nad ciałem K: $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ oraz $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz AB określoną w następujący sposób:

$$\mathrm{AB} = [c_{ij}]_{m\times p}, \quad \text{gdzie} \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p)$

Twierdzenie 3.2 Niech $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$, $\mathrm{C} = [c_{ij}]_{p\times q}$ będą macierzami nad ciałem K. Wówczas

$$(\mathrm{AB})\,\mathrm{C} = \mathrm{A}\,(\mathrm{BC})\,.$$

Twierdzenie 3.3 Niech $\lambda \in K$ oraz $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in M_n(K)$. Wówczas

1. $\mathrm{A}\,(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ oraz $(\mathrm{B} + \mathrm{C})\,\mathrm{A} = \mathrm{BA} + \mathrm{BC}$ - mnożenie macierzy jest rozdzielne względem ich dodawania
2. $(\lambda \mathrm{A})\,\mathrm{B} = \mathrm{A}\,(\lambda \mathrm{B}) = \lambda\,(\mathrm{AB})$.

Twierdzenie 3.4 Jeżeli $\mathrm{A}, \mathrm{I} \in M_n(K)$, to $\mathrm{AI} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$, co oznacza, że macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy w $M_n(K)$.

Definicja 3.7 Niech $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times m}$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \text{gdzie} \quad 1 \le i \le n \quad \text{oraz} \quad 1 \le j \le m.$$

Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T.

Twierdzenie 3.5 (*własności transponowania macierzy*) Niech $\lambda \in K$ oraz $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_{m\times n}(K)$.

1. $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T$,
2. $\left(\mathrm{A}^T\right)^T = \mathrm{A}$,
3. $(\lambda \mathrm{A})^T = \lambda \mathrm{A}^T$,
4. $(\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T \mathrm{A}^T$.

3.2 Definicja i własności wyznacznika

Definicja 3.8 Wyznacznikiem macierzy nazywamy funkcję

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K,$$

która każdej macierzy $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę z ciała K. Funkcja ta określona jest wzorem rekurencyjnym:

1. jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to $\det \mathrm{A} = a_{11}$,
2. jeżeli macierz A ma stopień $n \geq 2$, to

$$\det \mathrm{A} = (-1)^{1+1}\, a_{11} \det \mathrm{A}^*_{11} + (-1)^{1+2}\, a_{12} \det \mathrm{A}^*_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}\, a_{1n} \det \mathrm{A}^*_{1n}$$

$\left[\text{równoważnie: } \det \mathrm{A} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{1k} \det \mathrm{A}^*_{1k}\right]$, gdzie A^*_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczamy też przez $\det [a_{ij}]$ lub $|\mathrm{A}|$, a w formie rozwiniętej przez

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 3.6 (*reguły obliczania wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego*)

1. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
2. $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$ (reguła Sarrusa).

Uwaga: Reguła Sarrusa obliczania wyznaczników **nie przenosi** się na wyznaczniki **wyższych stopni**.

Twierdzenie 3.7 Wyznacznik macierzy dolnotrojkątnej lub górnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

3.3 Rozwinięcie Laplace'a

Definicja 3.9 Niech będzie dana macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$, gdzie $n > 1$. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy liczbę określoną następująco:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathrm{A}_{ij}^*,$$

gdzie A_{ij}^* oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Twierdzenie 3.8 (*rozwinięcie Laplace'a*) Niech będzie dana macierz $\mathrm{A} = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Wówczas

$$\det \mathrm{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{A}_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\det \mathrm{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathrm{A}_{kj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Twierdzenie 3.9 (*własności wyznaczników*)

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

2. Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (wiersze).

$$\begin{vmatrix} & a_{1i} & & a_{1j} & \\ & a_{2i} & & a_{2j} & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & a_{ni} & & a_{nj} & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} & a_{1j} & & a_{1i} & \\ & a_{2j} & & a_{2i} & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & a_{nj} & & a_{ni} & \end{vmatrix}$$

3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie jednakowe kolumny (wiersze) jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} & \alpha & & \alpha & \\ & \beta & & \beta & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & \varrho & & \varrho & \end{vmatrix} = 0$$

4. Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik macierzy.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & ca_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & ca_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & ca_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ponadto

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nn} \end{vmatrix} = c^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Wyznacznik macierzy kwadratowej, której elementy pewnej kolumny (wiersza) są sumami dwóch składników jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których elementy tej kolumny (wiersza) są zastąpione tymi składnikami.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j}+a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j}+a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj}+a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+ca_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+ca_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+ca_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. Wyznacznik macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 3.10 (*Cauchy*) Niech $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n(K)$. Wówczas

$$\det \mathrm{AB} = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}.$$

3.4 Macierz odwrotna

Definicja 3.10 Niech będzie dana macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1}, spełniającą warunek:

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

Definicja 3.11 Macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$ nazywamy osobliwą, jeżeli

$$\det \mathrm{A} = 0.$$

W przeciwnym wypadku macierz A nazywamy nieosobliwą.

Twierdzenie 3.11 Macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

Wniosek 3.1 Niech będzie dana macierz nieosobliwa $\mathrm{A} \in M_n(K)$. Wówczas

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Twierdzenie 3.12 (*własności macierzy odwrotnych*) Niech $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n(K)$ będą macierzami odwracalnymi oraz $\alpha \in K \setminus \{0\}$. Wtedy macierze A^{-1}, A^T, AB, $\alpha\mathrm{A}$ także są odwracalne i prawdziwe są równości:

1. $\det(\mathrm{A}^{-1}) = (\det \mathrm{A})^{-1}$
2. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$
3. $\left(\mathrm{A}^T\right)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^T$
4. $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
5. $(\alpha\mathrm{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathrm{A}^{-1}$

3.5 Rząd macierzy

Definicja 3.12 Niech dana będzie macierz $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(K)$. Minorem stopnia k macierzy A, gdzie $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez wykreślenie z macierzy A $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 3.13 Rzędem macierzy $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę równą największemu stopniowi jej niezerowych minorów i oznaczamy ją przez $rz\mathrm{A}$.

Z definicji rzędu macierzy wynika, że $rz\mathrm{A} \leq \min\{m, n\}$.

Definicja 3.14 Niech będzie dany zbiór macierzy $M_{m\times n}(K)$. Następujące przekształcenia zbioru $M_{m\times n}(K)$ w siebie nazywają się przekształceniami elementarnymi:

1. transpozycja dwóch kolumn (wierszy) macierzy,
2. pomnożenie dowolnej kolumny (wiersza) macierzy przez dowolny, różny od zera, skalar ciała K,
3. dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy dowolnej innej kolumny (wiersza) tej macierzy, pomnożonej przez dowolną liczbę ze zbioru K.

Twierdzenie 3.13 Przekształcenia elementarne nie zmieniają rzędu macierzy.

Twierdzenie 3.14 Rząd macierzy diagonalnej jest równy liczbie różnych od zera wyrazów jej głównej przekątnej.

Twierdzenie 3.15 Każdą macierz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ można sprowadzić do postaci diagonalnej za pomocą skończonej liczby przekształceń elementarnych.

Twierdzenie 3.16 Niech $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ oraz $rz\mathrm{A} = k$. Jeżeli M jest niezerowym minorem stopnia k macierzy A, to kolumny (wiersze) macierzy A nie wchodzące w skład minora M można zapisać w postaci sumy kolumn (wierszy) z minora M pomnożonych przez pewne współczynniki.

4 Układy równań liniowych

Definicja 4.1 Układem równań liniowych nad ciałem K nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in K$, $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Skalary a_{ij} nazywamy współczynnikami przy niewiadomych, a b_i - wyrazami wolnymi.

Definicja 4.2 Ciąg skalarów $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie $c_i \in K$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nazywamy rozwiązaniem układu równań, jeżeli zachodzą równości:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Układ równań, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem sprzecznym.

Powyższy układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B},$$

gdzie

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, a B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych.

Definicja 4.3 Macierz

$$[\mathrm{A}|\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą uzupełnioną (rozszerzoną) układu $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$.

Definicja 4.4 Układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{..} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

nazywamy układem jednorodnym.

Definicja 4.5 Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

4.1 Układy Cramera

Definicja 4.6 Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, w którym macierz A jest nieosobliwa, czyli jest macierzą kwadratową, gdzie $\det \mathrm{A} \neq 0$.

Twierdzenie 4.1 Układ Cramera $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ z n równaniami ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami:

$$x_j = \frac{W_{x_j}}{W}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie $W = \det A$ oraz W_{x_j} jest wyznacznikiem macierzy otrzymanej z macierzy A przez zastąpienie w niej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

4.2 Ogólna teoria układów równań liniowych

Twierdzenie 4.2 (*Kroneckera - Capellego*) Układ równań liniowych $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy głównej układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej, tzn.

$$rz\mathrm{A} = rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}].$$

Twierdzenie 4.3 Niech $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ będzie układem równań o n niewiadomych.

1. jeżeli $rz\mathrm{A} \neq rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}]$, to układ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny)
2. jeżeli $rz\mathrm{A} = rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}] = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony)
3. jeżeli $rz\mathrm{A} = rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}] = r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony)

5 Funkcje liczbowe

Definicja 5.1 Niech zbiory $X, Y \subset R$ będą niepuste. Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$ i oznaczamy przez

$$f : X \longrightarrow Y$$

Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja 5.2 Niech $f : X \longrightarrow Y$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy symbolem D_f. Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f a zbiór

$$\left\{y \in Y : \exists_{x \in D_f} \quad y = f(x)\right\}$$

nazywamy zbiorem jej wartości.

Definicja 5.3 Funkcje $f : D_f \longrightarrow Y$ oraz $g : D_f \longrightarrow Y$ są równe, jeżeli

$$D_f = D_g \quad \wedge \quad \forall_{x \in D_f} \quad f(x) = g(x)$$

Definicja 5.4 Wykresem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\left\{(x, y) \in R^2 : x \in X, y = f(x)\right\}$$

Definicja 5.5 Funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, jeżeli

$$\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad f(x) = y.$$

Piszemy wtedy $f : X \xrightarrow{na} Y$.

Definicja 5.6 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy okresową, jeżeli

$$\exists_{T>0} \quad \forall_{x \in X} \quad x + T \in X \quad \wedge \quad f(x + T) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji f. Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji f, to nazywamy go okresem podstawowym.

Definicja 5.7 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy parzystą, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$$

Definicja 5.8 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy nieparzystą, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$$

Definicja 5.9 Funkcja f jest ograniczona z dołu na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{m \in R} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \geq m.$$

Definicja 5.10 Funkcja f jest ograniczona z góry na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{M \in R} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \leq M.$$

Definicja 5.11 Funkcja f jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{m,M \in R} \quad \forall_{x \in A} \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Definicja 5.12 Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)].$$

Definicja 5.13 Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)].$$

Definicja 5.14 Funkcja f jest niemalejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)].$$

Definicja 5.15 Funkcja f jest nierosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)] .$$

Definicja 5.16 Niech $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Z \longrightarrow W$, gdzie $Y \subset Z$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \longrightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Definicja 5.17 Funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] .$$

Definicja 5.18 Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcje odwrotną do funkcji f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ spełniającą warunek:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

gdzie $x \in X, y \in Y$.

Twierdzenie 5.1 Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Wtedy

$$\forall_{x \in X} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y \in Y} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Definicja 5.19

1. Funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy *arcus sinus* i oznaczamy przez arcsin.
2. Funkcję odwrotną do funkcji cosinus obciętej do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ nazywamy *arcus cosinus* i oznaczamy przez arccos.
3. Funkcję odwrotną do funkcji tangens obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy *arcus tangens* i oznaczamy przez arctg.
4. Funkcję odwrotną do funkcji cotangens obciętej do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ nazywamy *arcus cotangens* i oznaczamy przez arcctg.

6 Ciągi liczbowe

Definicja 6.1 Ciągiem nazywamy funkcję $f : N \longrightarrow R$. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej $n \in N$ będziemy nazywać n-tym wyrazem ciągu i oznaczać przez a_n, tzn. $f(n) = a_n$. Sam ciąg oznaczać będziemy symbolem (a_n).

Definicja 6.2 Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\exists_{m \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad a_n \geq m.$$

Definicja 6.3 Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli

$$\exists_{M \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad a_n \leq M.$$

Definicja 6.4 Ciąg (a_n) jest ograniczony, jeżeli

$$\exists_{m,M \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad m \leq a_n \leq M.$$

Definicja 6.5 Ciąg (a_n) jest rosnący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Definicja 6.6 Ciąg (a_n) jest malejący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n > a_{n+1}.$$

Definicja 6.7 Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Definicja 6.8 Ciąg (a_n) jest nierosnący, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n \geq a_{n+1}.$$

6.1 Granica właściwa ciągu

Definicja 6.9 Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in R$, co zapisujemy

$$a_n \to a \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

jeżeli

$$\forall_{\epsilon>0} \quad \exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n>n_0} \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Twierdzenie 6.1 Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są zbieżne do granicy właściwej, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, o ile $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Twierdzenie 6.2 Jeżeli ciąg jest zbieżny, to ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie 6.3 Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Twierdzenie 6.4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Twierdzenie 6.5

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Twierdzenie 6.6 Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz ciąg (b_n) jest ograniczony, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Twierdzenie 6.7 (o trzech ciągach) Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Twierdzenie 6.8 Jeżeli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.

6.2 Granica niewłaściwa ciągu

Definicja 6.10 Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwej ∞ (odpowiednio do $-\infty$), co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{(odp.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty),$$

jeżeli

$$\forall_{A \in R} \quad \exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n > n_0} \quad a_n > A$$
$$\text{(odp.} \quad \forall_{A \in R} \quad \exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n > n_0} \quad a_n < A)$$

Twierdzenie 6.9 Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0 \in N} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \leq b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$)

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ (odp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

Definicja 6.11 Wyrażenia

$$[\infty - \infty], [0 \cdot \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$$

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

6.3 Granice pewnych ciągów

Twierdzenie 6.10 Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony.

Twierdzenie 6.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, gdzie $e \approx 2,718281828459045$

Twierdzenie 6.12

$$\lim_{n\to\infty} a^n \begin{cases} = 0 & \text{dla } a \in (-1,1) \\ = 1 & \text{dla } a = 1 \\ = \infty & \text{dla } a \in (1,\infty) \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } a \in (-\infty,-1\rangle \end{cases}$$

Twierdzenie 6.13

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a \geq 0$

7 Granice funkcji

7.1 Podstawowe definicje

Definicja 7.1

1. Sąsiedztwem lewostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
2. Sąsiedztwem prawostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
3. Sąsiedztwem punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Definicja 7.2

1. Sąsiedztwem ∞ nazywamy przedział $S(\infty) = (a, \infty)$ dla dowolnego $a \in R$.
2. Sąsiedztwem $-\infty$ nazywamy przedział $S(-\infty) = (-\infty, a)$ dla dowolnego $a \in R$.

Definicja 7.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 7.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa lewostronnego $S_-(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S_-(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 7.5 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa prawostronnego $S_+(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S_+(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 7.6 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$$

Definicja 7.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą $-\infty$ w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$

Twierdzenie 7.1 Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji f.

Twierdzenie 7.2 Jeżeli

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = x_0$, gdzie $x'_n \neq x_0$ dla każdego $n \in R$, oraz $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = g'$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} x''_n = x_0$, gdzie $x''_n \neq x_0$ dla każdego $n \in R$, oraz $\lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n) = g''$
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

Definicja 7.8 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w ∞, co zapisujemy $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 7.9 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(-\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(-\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 7.10 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

Twierdzenie 7.3 Jeżeli

1. $\lim_{n\to\infty} x'_n = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$
2. $\lim_{n\to\infty} x''_n = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

7.2 Twierdzenia o granicach funkcji

Twierdzenie 7.4 Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdzie $c \in R$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Twierdzenie 7.5 Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0)$
3. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = q$

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = q$.

Twierdzenie 7.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Twierdzenie 7.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a > 0$

Twierdzenie 7.8 Jeżeli istnieje funkcja odwrotna do funkcji g w pewnym otoczeniu $S(x_0)$, to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to g(x_0)} f(g^{-1}(t))$$

7.3 Asymptoty funkcji

Definicja 7.11 Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

Definicja 7.12 Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

Definicja 7.13 Prosta jest asymptotą pionową obustronną funkcji, jeżeli jest asymptotą pionową prawostronną i lewostronną.

Definicja 7.14 Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Definicja 7.15 Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = b$$

Definicja 7.16 Prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Definicja 7.17 Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Twierdzenie 7.9 Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$

$$\left(a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]\right)$$

8 Ciągłość funkcji

8.1 Podstawowe definicje

Definicja 8.1

1. Otoczeniem lewostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$ dla dowolnego $\delta > 0$.
2. Otoczeniem prawostronnym punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O_+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
3. Otoczeniem punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Definicja 8.2 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 8.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia lewostronnego $O_-(x_0)$. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 8.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia prawostronnego $O_+(x_0)$. Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 8.5 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w x_0.

Definicja 8.6 Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 8.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość I rodzaju, jeżeli istnieją granice skończone $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Definicja 8.8 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość II rodzaju, jeżeli co najmniej jedna z granic $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ nie istnieje lub jest niewłaściwa.

8.2 Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie 8.1 Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to ciągłe są w punkcie x_0 także funkcje: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz funkcja $\frac{f}{g}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 8.2 Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$

to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie 8.3 Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

8.3 Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie 8.4 (Weierstrassa) Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to jest na tym przedziale ograniczona.

Twierdzenie 8.5 (Darboux) Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\forall_{w \in (f(a), f(b))} \quad \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = w$$

Wniosek 8.1 (Darboux) Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, to

$$\exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = 0$$

9 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

9.1 Podstawowe definicje

Definicja 9.1 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx zmiennej niezależnej, gdzie $\Delta x \neq 0$ oraz $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$, nazywamy liczbę

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 9.2 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 9.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego lewostronnego otoczenia $O_-(x_0)$. Pochodną lewostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 9.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego prawostronnego otoczenia $O_+(x_0)$. Pochodną prawostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Twierdzenie 9.1 Funkcja ma pochodna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$$

Twierdzenie 9.2 Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

Definicja 9.5 Funkcja ma pochodną właściwą na zbiorze, jeżeli ma pochodna w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 9.6 Niech f będzie ciągła w punkcie x_0. Funkcja ma pochodną niewłaściwą w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

9.2 Twierdzenia o pochodnej funkcji

Twierdzenie 9.3 Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to

1. $[f+g]'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $[cf]'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie $c \in R$
3. $[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, o ile $g(x_0) \neq 0$

Twierdzenie 9.4 Jeżeli

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0
2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$

to

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Twierdzenie 9.5 Jeżeli funkcja f ma następujące własności:

1. jest ciągła w otoczeniu $O(x_0)$
2. jest malejąca lub rosnąca na otoczeniu $O(x_0)$
3. ma pochodną właściwą $f'(x_0)$

to

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{gdzie} \quad y_0 = f(x_0)$$

9.3 Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Definicja 9.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji f przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$, gdy $x \longrightarrow x_0$.

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Jeżeli α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i dodatnią półosią Ox, to

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

Jeżeli α_+ oraz α_- oznaczają odpowiednio kąty między prawą i lewą stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ a dodatnią półosią Ox, to

$$f'_+(x_0) = tg\alpha_+ \quad \text{oraz} \quad f'_-(x_0) = tg\alpha_-$$

Twierdzenie 9.6 Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

9.4 Różniczka funkcji

Definicja 9.8 Niech funkcja f ma pochodna właściwą w punkcie x_0. Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Twierdzenie 9.7 Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Błąd jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej niezależnej Δx, tzn.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$$

9.5 Pochodne wyższych rzędów

Definicja 9.9 Pochodną właściwą n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy rekurencyjnie:

1. $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$
2. $f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0)$ dla $n \geq 2$

Dodatkowo przyjmujemy, że $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Twierdzenie 9.8 (Leibniza) Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

9.6 Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 9.9 (Rolle'a) Jeżeli funkcja f:

1. jest ciągła na $[a, b]$
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0$$

Twierdzenie 9.10 (Lagrange'a) Jeżeli funkcja f

1. jest ciągła na $[a, b]$
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wnioski z tw. Lagrange'a

Wniosek 9.1 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) = 0,$$

to jest stała na przedziale (a, b).

Wniosek 9.2 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) > 0,$$

to jest rosnąca na przedziale (a, b).

Wniosek 9.3 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) < 0,$$

to jest malejąca na przedziale (a, b).

9.7 Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie 9.11 Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$
2. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

9.8 Rozwinięcie Taylora funkcji

Twierdzenie 9.12 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu $O(x_0)$ n-tą pochodną, to dla każdego $x \in O(x_0)$ istnieje punkt c taki, że zachodzi równość

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

gdzie $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

9.9 Ekstrema funkcji

Definicja 9.10 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ minimum lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x\in S(x_0)} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Definicja 9.11 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ maksimum lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x\in S(x_0)} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Definicja 9.12 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ minimum lokalne właściwe, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) > f(x_0)$$

Definicja 9.13 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ maksimum lokalne właściwe, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) < f(x_0)$$

Definicja 9.14 Liczba $m \in R$ jest najmniejszą wartością funkcji na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{x_0 \in A} \quad f(x_0) = m \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \geq m$$

Definicja 9.15 Liczba $M \in R$ jest największą wartością funkcji na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{x_0 \in A} \quad f(x_0) = M \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \leq M$$

Twierdzenie 9.13 (Fermata) Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. ma ekstremum lokalne w x_0
2. istnieje $f'(x_0)$

to

$$f'(x_0) = 0$$

Twierdzenie 9.14 Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których jej pochodna równa się zero albo w punktach, w których jej pochodna nie istnieje.

Twierdzenie 9.15 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f'(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f'(x) < 0$$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 9.16 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f'(x) < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f'(x) > 0$$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 9.17 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 9.18 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) > 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 9.19 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to w punkcie x_0 nie ma ekstremum lokalnego.

9.10 Punkty przegięcia funkcji

Definicja 9.16 Funkcja f jest wklęsła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$

zachodzi

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 9.17 Funkcja f jest wypukła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 9.18 Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 9.19 Funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Twierdzenie 9.20 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f''(x) > 0,$$

to jest ściśle wypukła na przedziale (a, b).

Twierdzenie 9.21 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f''(x) < 0,$$

to jest ściśle wklęsła na przedziale (a, b).

Definicja 9.20 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Niech funkcja f ma pochodną na $O(x_0)$.

Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f, jeżeli istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że f jest ściśle wypukła na $S_-(x_0)$ oraz ściśle wklęsła na $S_+(x_0)$ albo odwrotnie.

Twierdzenie 9.22 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia
2. istnieje $f''(x_0)$

to

$$f''(x_0) = 0$$

Twierdzenie 9.23 Funkcja może mieć punkty przegięcia tylko w punktach, w których jej druga pochodna równa się zero albo w punktach, w których ta pochodna nie istnieje.

Twierdzenie 9.24 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = 0$
2. istnieją sąsiedztwa lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

   $$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f''(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f''(x) < 0$$

   lub

   $$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f''(x) < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f''(x) > 0$$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie 9.25 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie 9.26 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 4$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ nie jest punktem przegięcia funkcji f.

9.11 Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. Dziedzina funkcji.
2. Podstawowe własności funkcji:
   - parzystość lub nieparzystość
   - okresowość
   - punkty przecięcia wykresu z osiami Ox i Oy
   - ciągłość
3. Granice lub wartości funkcji na „końcach” dziedziny.
4. Asymptoty funkcji.
5. Pierwsza pochodna funkcji:
   - dziedzina pochodnej
   - przedziały monotoniczności funkcji
   - ekstrema funkcji
   - granice lub wartości funkcji na „końcach” dziedziny pochodnej
6. Druga pochodna funkcji:
   - dziedzina drugiej pochodnej
   - przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji
   - punkty przegięcia
7. Tabelka.
8. Wykres funkcji.

10 Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

10.1 Podstawowe definicje

Definicja 10.1 Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$\forall_{x \in I} \quad F'(x) = f(x)$$

Twierdzenie 10.1 Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy

1. $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in R$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I
2. każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + C$, gdzie $C \in R$

Twierdzenie 10.2 Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Definicja 10.2 Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C : C \in R\}$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)dx$

Twierdzenie 10.3 Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy

$$\forall_{x \in I} \quad \left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

Twierdzenie 10.4 Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy

$$\forall_{x\in I} \quad \int f'(x)dx = f(x) + C,$$

gdzie $C \in R$.

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9 $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$

11. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

10.2 Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie 10.5 Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

1. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
3. $\int (cf(x))\, dx = c \int f(x)dx$, gdzie $c \in R$

Twierdzenie 10.6 (o całkowaniu przez części) Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne, to

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Twierdzenie 10.7 (o całkowaniu przez podstawienie) Jeżeli

1. funkcja $f : I \longrightarrow R$ jest ciągła na przedziale I
2. funkcja $g : J \longrightarrow I$ ma ciągłą pochodną na przedziale I,

to

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

10.3 Całkowanie funkcji wymiernych

Twierdzenie 10.8 (całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju)

1. $$\int \frac{Adx}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$$

2. $$\int \frac{Adx}{(ax+b)^n}dx = -\frac{A}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$$

Twierdzenie 10.9

1. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

2. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + C, \quad n \geq 2$$

Twierdzenie 10.10 (całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju)

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{P}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

10.4 Całkowanie funkcji niewymiernych

Twierdzenie 10.11

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad \text{gdzie} \quad k \neq 0$$

3. $$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

4. $$\int \sqrt{x^2+k} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \neq 0$$

Twierdzenie 10.12 (metoda współczynników nieoznaczonych)

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

10.5 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Twierdzenie 10.13

1. $$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx, \quad n \geq 2$$

2. $$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx, \quad n \geq 2$$

Definicja 10.3 Funkcję, którą można przedstawić w postaci ilorazu wielomianów dwóch zmiennych, nazywamy funkcją wymierną dwóch zmiennych.

Twierdzenie 10.14 Niech $R(u,v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Wówczas do obliczania całek postaci

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

w zależności od warunków jakie spełnia funkcja R, stosuje się podstawienia:

1. $R(-u,v) = -R(u,v)$,

$$t = \cos x \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

2. $R(u,-v) = -R(u,v)$,

$$t = \sin x \quad \cos x = \sqrt{1-t^2} \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3. $R(-u,-v) = R(u,v)$,

$$t = tgx \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4. R - dowolna funkcja,

$$t = tg\frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

10.6 Całki oznaczone

Definicja 10.4 Podziałem odcinka $[a,b]$ na n części, gdzie $n \in N$, nazywamy zbiór

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Definicja 10.5 Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$ oraz niech P będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi P oraz punktom pośrednim ξ_k, gdzie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ oraz $1 \leq k \leq n$, tego podziału nazywamy liczbę

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \text{gdzie} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Definicja 10.6 Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P)\longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

gdzie $\delta(P) = \max_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$, o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposobu podziałów P przedziału $[a, b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich ξ_k. Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{dla} \quad a < b$$

Twierdzenie 10.15 Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę nieciągłości I rodzaju, to jest na nim całkowalna.

Twierdzenie 10.16 (Newtona - Leibniza) Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcje pierwotną funkcji f na tym przedziale.

10.7 Twierdzenia o całkach oznaczonych

Twierdzenie 10.17 Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad \text{gdzie} \quad c \in R$

Twierdzenie 10.18 (o całkowaniu przez części) Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Twierdzenie 10.19 (o całkowaniu przez podstawienie) Jeżeli

1. funkcja $f : [a, b] \longrightarrow R$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$
2. funkcja $g : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$,
3. $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$

to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Twierdzenie 10.20 Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech funkcja g różni się od funkcji f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy funkcja g jest także całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Twierdzenie 10.21 Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz $c \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

10.8 Całki niewłaściwe

Twierdzenie 10.22 Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty)$. Całkę niewłaściwą I rodzaju funkcji f na $[a, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx$$

Jeżeli granica jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

Twierdzenie 10.23 Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, b]$. Całkę niewłaściwą I rodzaju funkcji f na $(-\infty, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{T\to-\infty} \int_T^b f(x)dx$$

Twierdzenie 10.24 Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. Całkę niewłaściwą I rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx,$$

gdzie a jest dowolna liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie 10.25 Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie $S_+(a)$. Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Twierdzenie 10.26 Niech funkcja f określona na przedziale $[a, b)$ będzie nieograniczona na lewostronnym sąsiedztwie $S_-(b)$. Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na $[a, b)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Twierdzenie 10.27 Niech funkcja f określona na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ będzie nieograniczona na sąsiedztwie $S_-(c)$, $S_+(c)$. Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na $[a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

10.9 Zastosowanie całek oznaczonych

Twierdzenie 10.28

1. Niech funkcje f i g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

2. Niech funkcje k i h będą ciągłe na przedziale $[c, d]$ oraz niech $k(y) \leq h(y)$ dla każdego $y \in [c, d]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresami funkcji k i h oraz prostymi $y = c$, $y = d$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_c^d [h(y) - k(y)]dy$$

Twierdzenie 10.29 Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy długość krzywej $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Twierdzenie 10.30

1. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

2. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Twierdzenie 10.31

1. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

2. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$L = 2\pi \int\limits_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

11 Geometria analityczna w przestrzeni

11.1 Wektory

Definicja 11.1 Przestrzenią R^3 nazywamy zbiór

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, x \in R\}$$

Definicja 11.2 Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni R^3 są współliniowe, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty.

Definicja 11.3 Mówimy, że punkty K, L, M, N przestrzeni R^3 są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty.

Definicja 11.4 Mówimy, że wektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ są współlliniowe, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Wektory współliniowe będziemy nazywać także wektorami równoległymi - piszemy wtedy $a \parallel b$.

Definicja 11.5 Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, w której zawarte są te wektory.

Definicja 11.6 Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone proste x, y, z przecinające się w jednym punkcie O, które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ współrzędnych oznaczamy przez $Oxyz$. Proste Ox, Oy, Oz nazywamy osiami, a płaszczyzny xOy, yOz, xOz płaszczyznami układu współrzędnych.

Definicja 11.7 W zależności od wzajemnego położenia osi Ox, Oy, Oz układu współrzędnych wyróżniamy dwie jego orientacje: układ prawoskrętny i układ lewoskrętny.

Definicja 11.8 Długość wektora $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ jest określona wzorem:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Twierdzenie 11.1 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ będą wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy:

1. $|\overrightarrow{u}| \geq 0$, przy czym $|\overrightarrow{u}| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $|\alpha \overrightarrow{u}| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{u}|$
3. $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}|$

Definicja 11.9 Wersorem nazywamy wektor o długości l.

Definicja 11.10 Wektory $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0), \overrightarrow{j} = (0, 1, 0), \overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ nazywamy wersorami odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz.

11.2 Iloczyn skalarny

Definicja 11.11 Niech $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ będą dowolnymi wektorami w R^3. Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

Twierdzenie 11.2 Niech $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ będą dowolnymi wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy

1. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$
2. $(\alpha \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v})$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{w}$
4. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$
5. $|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$
6. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$

Twierdzenie 11.3 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w R^3. Wtedy

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

11.3 Iloczyn wektorowy

Definicja 11.12 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w R^3. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tworzą układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych, jeżeli

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0$$

W przypadku, gdy podany wyznacznik jest ujemny mówimy, że orientacja układu wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych. Układ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ nazywamy prawoskrętnym (lewoskrętnym), gdy jest on zgodny z prawoskrętnym (lewoskrętnym) układem współrzędnych.

Definicja 11.13 Niech $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w R^3. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{w}$, który spełnia warunki:

1. jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, tzn. $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, tzn. $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\varphi$, gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.
3. orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

Iloczyn wektorowy pary wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ oznaczamy przez $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Jeżeli jeden z wektorów $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ jest wektorem zerowym lub jeżeli wektory te są współliniowe, to przyjmujemy, że $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Twierdzenie 11.4 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w R^3. Wtedy

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

gdzie $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ oznaczają wersory odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz.

Twierdzenie 11.5 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ będą dowolnymi wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$
2. $(\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$
4. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$
5. $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$
6. $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

11.4 Iloczyn mieszany

Definicja 11.14 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ będą wektorami w R^3. Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ określamy wzorem:

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}$$

Twierdzenie 11.6 (interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego wektorów) Iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$,

$$|V| = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}|$$

Twierdzenie 11.7 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w R^3. Wtedy

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 11.8 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{r}$ będą wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy

1. $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u}$
2. $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{w}$
3. $((\overrightarrow{u} + \overrightarrow{r}) \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}$
4. $((\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \alpha((\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w})$
5. wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ są współpłaszczyznowe $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = 0$
6. $|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$

11.5 Równania płaszczyzny

Twierdzenie 11.9 Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i prostopadłej do niezerowego wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie te nazywamy równaniem normalnym płaszczyzny π.

Twierdzenie 11.10 Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, b_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 s \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 s \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 s \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad t, s \in R$$

Równanie te nazywamy równaniem parametrycznym płaszczyzny π.

Twierdzenie 11.11 Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ma postać:

1.

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Twierdzenie 11.12 Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach Ox, Oy, Oz układu współrzędnych odpowiednio odcinki (zorientowane) $a, b, c \neq 0$ ma postać:

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Równanie to nazywamy równaniem odcinkowym płaszczyzny π.

11.6 Równania prostej

Twierdzenie 11.13 Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do niezerowego wektora $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Postać tą nazywamy równaniem kierunkowym prostej l.

Twierdzenie 11.14 Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do niezerowego wektora $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad t \in R$$

Równania te nazywamy równaniami parametrycznymi prostej l.

Twierdzenie 11.15 Równanie prostej l, będącej częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ma postać

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Postać tą nazywamy równaniem krawędziowym prostej l.

11.7 Wzajemne położenie punktów, płaszczyzn i prostych

Definicja 11.15 Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp \pi.$$

Definicja 11.16 Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp l.$$

Twierdzenie 11.16 Odległość punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Definicja 11.17 Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny π nazywamy kąt $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym między wektorem normalnym płaszczyzny π i wektorem kierunkowym prostej l.

Definicja 11.18 Kątem między prostymi nazywamy kąt ostry utworzony przez wektory kierunkowe tych prostych.

Definicja 11.19 Kątem między płaszczyznami nazywamy kąt ostry między wektorami normalnymi tych płaszczyzn.

12 Funkcje dwóch zmiennych

12.1 Podstawowe definicje

Definicja 12.1 Przestrzenią dwuwymiarową (płaszczyzną) nazywamy zbiór $R^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$

Definicja 12.2 Otoczeniem punktu $P = (a, b)$ na płaszczyźnie nazywamy zbiór

$$O(P) = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r\}$$

dla dowolnego $r > 0$.

Definicja 12.3 Sąsiedztwem punktu $P = (a, b)$ na płaszczyźnie nazywamy zbiór

$$S(P) = O(P) - \{P\}$$

Definicja 12.4 Funkcją f dwóch zmiennych określoną na zbiorze $A \subset R^2$ o wartościach w R nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru A dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Funkcję taką oznaczamy przez $f : A \to R$, $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in A$. Wartość funkcji f w punkcie (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$. Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji i oznaczamy przez D_f.

Definicja 12.5 Wykresem funkcji f dwóch zmiennych nazywamy zbiór:

$$\{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\}$$

Definicja 12.6 Zbiór $A \subset R^2$ jest ograniczony, jeżeli

$$\exists_{P \in R^2} \quad \exists_{r>0} \quad A \subset O(P, r)$$

Definicja 12.7 Punkt P jest punktem wewnętrznym zbioru $A \subset R^2$, jeżeli

$$\exists_{r>0} \quad O(P, r) \subset A$$

Definicja 12.8 Zbiór jest otwarty, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

12.2 Granica i ciągłość funkcji w punkcie

Definicja 12.9 Ciągiem punktów na płaszczyźnie nazywamy odwzorowanie $f : N \longrightarrow R^2$. Wartość tego odwzorowania dla liczby naturalnej $n \in N$ będziemy nazywać n-tym wyrazem ciągu i oznaczać przez $P_n = (x_n, y_n)$, tzn. $f(n) = P_n$. Sam ciąg oznaczać będziemy symbolem (P_n) lub $((x_n, y_n))$.

Definicja 12.10 Ciąg $(P_n) = ((x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0),$$

jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

Definicja 12.11 Niech $(x_0, y_0) \in R^2$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0, y_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie (x_0, y_0), co zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g,$$

jeżeli

$$\forall_{((x_n,y_n))\subset S(x_0,y_0)}$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g$$

Definicja 12.12 Niech $(x_0, y_0) \in R^2$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0, y_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą $\pm\infty$ w punkcie (x_0, y_0), co zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \pm\infty,$$

jeżeli

$$\forall_{((x_n,y_n))\subset S(x_0,y_0)}$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \pm\infty$$

Definicja 12.13 Niech $(x_0, y_0) \in R^2$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0, y_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0), jeżeli

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

13 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych

13.1 Pochodne cząstkowe funkcji

Definicja 13.1 Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu $O(P)$ punktu $P = (x_0, y_0)$. Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Pochodną tą oznaczamy także symbolem $f'_x(x_0, y_0)$.
Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem y w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Pochodną tą oznaczamy także symbolem $f'_y(x_0, y_0)$

Definicja 13.2 Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset R^2$, to funkcje

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \text{gdzie}(x, y) \in D$$

nazywamy pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f na zbiorze D i oznaczamy odpowiednio $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ lub f'_x, f'_y.

Definicja 13.3 Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe I rzędu na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Pochodne cząstkowe II rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(x_0, y_0).$$

Powyższe pochodne oznacza się również odpowiednio przez $f''_{xx}(x_0, y_0)$, $f''_{xy}(x_0, y_0)$, $f''_{yx}(x_0, y_0)$, $f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Definicja 13.4 Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset R^2$, to funkcje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

gdzie $(x, y) \in D$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji f na zbiorze D i oznaczamy odpowiednio $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ lub f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.

Twierdzenie 13.1 (*Schwarza*) Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ są ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to są równe, tzn.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Jeżeli α oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $y = y_0$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, do płaszczyzny xOy, to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\alpha$$

Jeżeli β oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $x = x_0$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, do płaszczyzny xOy, to

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = tg\beta$$

13.2 Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Definicja 13.5 Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Definicja 13.6 Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

Definicja 13.7 Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Definicja 13.8 Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne właściwe, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Twierdzenie 13.2 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0)
2. istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Twierdzenie 13.3 Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są równe 0 albo w punktach, w których choć jedna z nich nie istnieje.

Twierdzenie 13.4 Niech $(x_0, y_0) \in R^2$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0, y_0)$. Jeżeli

1. funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0)
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)]^2 > 0$,

to funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) i jest to:

a. minimum lokalne właściwe, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

b. maksimum lokalne właściwe, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$

Jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)]^2 < 0$, to funkcja nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0, y_0).

13.3 Funkcje uwikłane

Definicja 13.9 Funkcją uwikłaną określoną równaniem

$$F(x, y) = 0$$

nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ spełniającą równość

$$F(x, y(x)) = 0$$

dla wszystkich x z pewnego przedziału I.

Twierdzenie 13.5 Niech $(x_0, y_0) \in R^2$ oraz niech funkcja F będzie określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Dodatkowo niech

1. pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ są ciągłe na tym otoczeniu,
2. $F(x_0, y_0) = 0$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

Wtedy na pewnym otoczeniu $O(x_0)$ istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y = y(x)$ spełniająca warunki

a. $F(x, y(x)) = 0$ dla każdego $x \in O(x_0)$

b. $y(x_0) = y_0$

c. $y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}$ dla każdego $x \in O(x_0)$

Twierdzenie 13.6 Niech funkcja F będzie określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ i niech ma tam ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Ponadto niech

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$
3. $A = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \neq 0$

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona równaniem $F(x, y) = 0$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe i jest to:

a. minimum, gdy $A > 0$ albo

b. maksimum, gdy $A < 0$

14 Całki podwójne

14.1 Całki podwójne po prostokącie

Definicja 14.1 Wnętrzem prostokąta
$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ nazywamy zbiór

$$int(R) = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$$

Definicja 14.2 Podziałem prostokąta
$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ na n prostokątów, gdzie $n \in N$, nazywamy zbiór

$$P = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\},$$

gdzie $\bigcup\limits_{k=1}^{n} R_k = R$ oraz $int(R_i) \cap int(R_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$. Dodatkowo wymiary prostokąta R_k oznaczamy odpowiednio przez Δx_k, Δy_k oraz długość jego przekątnej przez d_k.

Definicja 14.3 Niech funkcja f będzie ograniczona na prostokącie $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ oraz niech P będzie podziałem tego prostokąta. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi P oraz punktom pośrednim (x_k^*, y_k^*), gdzie $(x_k^*, y_k^*) \in R_k$ oraz $1 \leq k \leq n$, tego podziału nazywamy liczbę

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k)$$

Definicja 14.4 Niech funkcja f będzie ograniczona na prostokącie $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R definiujemy wzorem

$$\iint\limits_{R} f(x, y)\, dxdy = \lim_{\delta(P) \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k),$$

gdzie $\delta(P) = \max_{1\leq k\leq n}\{d_k\}$, o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposobu podziałów P prostokąta R ani od sposobów wyboru punktów pośrednich (x_k^*, y_k^*).

Twierdzenie 14.1 Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie, to jest na nim całkowalna.

Twierdzenie 14.2 Jeżeli funkcje f i g są całkowalne po prostokącie R oraz c jest dowolną liczbą rzeczywistą, to

1. $\iint\limits_R (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_R f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_R g(x,y)\,dxdy$
2. $\iint\limits_R cf(x,y)\,dxdy = c\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$

Twierdzenie 14.3 Niech funkcja f będzie całkowalna na prostokącie R. Wtedy dla dowolnego podziału prostokąta R na prostokąty R_1, R_2 o rozłącznych wnętrzach funkcja f jest całkowalna na tych prostokątach oraz

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dxdy$$

Twierdzenie 14.4 Niech funkcja f będzie całkowalna na prostokącie

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Wtedy

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

Twierdzenie 14.5 Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$
2. funkcja g jest ciągła na przedziale $[c,d]$

to

$$\iint\limits_R f(x)g(y)\,dxdy = \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_c^d g(y)\,dy\right)$$

gdzie $R = [a,b]\times[c,d]$.

14.2 Całki podwójne po obszarach normalnych

Definicja 14.5 Niepusty podzbiór płaszczyzny nazywamy obszarem, jeżeli jest otwarty oraz każde dwa punkty można połączyć krzywą łamaną całkowicie w nim zawartą. Obszar łącznie ze swoim brzegiem nazywamy obszarem domkniętym.

Definicja 14.6 Obszarem normalnym względem osi Ox nazywamy obszar domknięty postaci:

$$\{(x,y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

gdzie funkcje g i h są ciągłe na $[a,b]$ oraz $g(x) < h(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$.

Definicja 14.7 Obszarem normalnym względem osi Oy nazywamy obszar domknięty postaci:

$$\{(x,y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\},$$

gdzie funkcje p i q są ciągłe na $[c,d]$ oraz $p(y) < q(y)$ dla każdego $y \in (c,d)$.

Twierdzenie 14.6 Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

to

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Twierdzenie 14.7 Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\},$$

to

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Definicja 14.8 Obszarem regularnym nazywamy sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi Ox lub Oy) o parami rozłącznych wnętrzach.

Twierdzenie 14.8 Jeżeli obszar regularny D jest sumą obszarów normalnych D_1, D_2,…, D_n o parami rozłącznych wnętrzach oraz funkcja f jest całkowalna na obszarze D, to

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \ldots + \iint\limits_{D_n} f(x, y)\, dxdy$$

Twierdzenie 14.9 Jeżeli

1. funkcja f jest całkowalna na obszarze regularnym D,
2. funkcja ograniczona g pokrywa się z funkcją f poza skończoną liczbą krzywych, które są wykresami funkcji ciągłych postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$

to funkcja g jest całkowalna na D oraz

$$\iint\limits_D g(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

14.3 Zamiana zmiennych w całkach podwójnych

Definicja 14.9 Niech Δ i D będą obszarami odpowiednio na płaszczyznach uOv i xOy. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję $\mathcal{T}\colon \Delta \to D$ określoną wzorem:

$$(x,y)=\mathcal{T}(u,v)=\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big),\quad \text{gdzie}\quad (u,v)\in\Delta$$

Obrazem zbioru Δ przy przekształceniu $\mathcal{T}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{T}(\Delta)=\big\{(x,y): x=\phi(u,v), y=\psi(u,v), (u,v)\in\Delta\big\}$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ nazywamy ciągłym, jeżeli funkcje ϕ, ψ są ciągłe na obszarze Δ. Przekształcenie $\mathcal{T}$ nazywamy różnowartościowym, jeżeli różnym punktom obszaru Δ odpowiadają różne punkty jego obrazu D.

Twierdzenie 14.10 Obraz obszaru przy przekształceniu ciągłym i różnowartościowym jest również obszarem.

Definicja 14.10 Jakobianem przekształcenia $\mathcal{T}(u,v)=\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)$ nazywamy funkcję $J_{\mathcal{T}}$ określoną wzorem:

$$J_{\mathcal{T}}(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 14.11 Niech

1. przekształcenie $\mathcal{T}$: $\begin{cases} x=\phi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases}$ przekształca różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego Δ na wnętrze obszaru regularnego D,
2. funkcje ϕ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar Δ,
3. funkcja f jest ciągła na obszarze D
4. jakobian $J_{\mathcal{T}}$ jest różny od zera wewnątrz obszaru Δ.

Wtedy

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\Delta} f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)\ |J_{\mathcal{T}}(u,v)|\ du\,dv$$

14.4 Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych

Definicja 14.11 Położenie punktu P na płaszczyźnie można opisać parą liczb (ρ, φ), gdzie:
ρ - oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leq \rho < \infty$
φ - oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi Ox a promieniem wodzącym punktu P, $0 \leq \varphi < 2\pi$

Twierdzenie 14.12 Współrzędne kartezjańskie (x, y) punktu płaszczyzny we współrzędnych biegunowych (ρ, φ) określone są wzorami:

$$\mathcal{B} : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Przekształcenie $\mathcal{B}$, które punktowi (ρ, φ) przyporządkowuje punkt (x, y) nazywamy przekształceniem biegunowym.

Twierdzenie 14.13 Niech

1. obszar Δ we współrzędnych biegunowych będzie obszarem normalnym
2. funkcja f będzie ciągła na obszarze D, który jest obrazem obszaru Δ przy przekształceniu biegunowym, tzn. $D = \mathcal{B}(\Delta)$

Wtedy

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_\Delta f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi$$

14.5 Zastosowanie całek podwójnych

Twierdzenie 14.14 Pole obszaru $D \subset R^2$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \iint\limits_D dxdy$$

Twierdzenie 14.15 Objętość bryły V położonej nad obszarem $D \subset R^2$ i ograniczonej z dołu i z góry odpowiednio powierzchniami $z = f(x,y)$ i $z = g(x,y)$, wyraża się wzorem:

$$|V| = \iint\limits_D [g(x,y) - f(x,y)]\, dxdy$$

Twierdzenie 14.16 Pole płata powierzchniowego Σ, który jest wykresem funkcji $z = f(x,y)$, gdzie $(x,y) \in D$ wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

15 Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

15.1 Podstawowe definicje

Definicja 15.1 Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y') = 0,$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje jej pochodna rzędu pierwszego. Równanie to można w szczególnych przypadkach sprowadzić do postaci normalnej

$$y' = f(x, y)$$

Definicja 15.2 Funkcję $y(x)$ nazywamy rozwiązaniem szczególnym na przedziale (a, b) równania różniczkowego $y' = f(x, y)$, jeżeli na tym przedziale jest ona różniczkowalna i zamienia to równanie w tożsamość

$$y'(x) \equiv f(x, y(x))$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy jego krzywą całkową.

Definicja 15.3 Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ nazywamy wyrażenie

$$y = \phi(x, C)$$

które dla każdej wartości parametru C jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Definicja 15.4 Równanie różniczkowe $y' = f(x, y)$ oraz warunek

$$y(x_0) = y_0$$

nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego.

Definicja 15.5 Funkcję $y(x)$ nazywamy rozwiązaniem zagadnienia początkowego $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, jeżeli jest rozwiązaniem równania $y' = f(x, y)$ na pewnym przedziale zawierającym punkt x_0 i spełnia warunek $y(x_0) = y_0$.

Twierdzenie 15.1 Jeżeli funkcja $f(x, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ są ciągłe na obszarze $D \subset R^2$ oraz $(x_0, y_0) \in D$, to zagadnienie Cauchy'ego

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

15.2 Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 15.6 Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$y' = g(x)h(y)$$

nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Twierdzenie 15.2 Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(y)$ są ciągłe, przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego y, to rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych $y' = g(x)h(y)$ dane jest wzorem:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Jeżeli $h(y_0) = 0$ dla pewnego y_0, to funkcja stała $y(x) \equiv y_0$ jest też rozwiązaniem równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych $y' = g(x)h(y)$.

Twierdzenie 15.3 Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(y)$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach (a, b) i (c, d), przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c, d)$ oraz $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$, to zagadnienie Cauchy'ego

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

15.3 Równanie różniczkowe jednorodne

Definicja 15.7 Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

nazywamy równaniem jednorodnym.

Twierdzenie 15.4 Równanie jednorodne $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ przez zamianę zmiennych

$$y = ux$$

sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych postaci

$$tu' = f(u) - u.$$

Twierdzenie 15.5 Jeżeli funkcja $f(u)$ jest ciągła na przedziale (a, b) i spełnia na nim warunek $f(u) \neq u$ oraz $a < \frac{y_0}{x_0} < b$, to zagadnienie początkowe

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

15.4 Równanie różniczkowe liniowe

Definicja 15.8 Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$y' + p(x)y = q(x)$$

nazywamy równaniem liniowym I rzędu. Jeżeli $q(x) \not\equiv 0$, to równanie nazywamy liniowym niejednorodnym. W przeciwnym przypadku nazywamy je liniowym jednorodnym.

Twierdzenie 15.6 Rozwiązanie ogólne równania liniowego jednorodnego $y' + p(x)y = 0$ dane jest wzorem

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Twierdzenie 15.7 Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego $y' + p(x)y = q(x)$ dane jest wzorem

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx$$

Twierdzenie 15.8 Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego

$$y' + p(x)y = q(x)$$

jest sumą dowolnego rozwiązania szczególnego tego równania i rozwiązania ogólnego równania liniowego jednorodnego

$$y' + p(x)y = 0$$

Twierdzenie 15.9 Jeżeli funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b) oraz $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in R$, to zagadnienie początkowe

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

15.5 Równanie różniczkowe Bernoulliego

Definicja 15.9 Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$y' + p(x)y = q(x)y^r,$$

gdzie $r \in R \setminus \{0, 1\}$, nazywamy równaniem Bernoulliego.

Twierdzenie 15.10 Równanie różniczkowe Bernoulliego $y' + p(x)y = q(x)y^r$ przez zamianę zmiennych

$$z = y^{1-r}$$

sprowadza się do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego postaci

$$z' + (1-r)p(x)z = (1-r)q(x)$$

15.6 Równanie różniczkowe zupełne

Definicja 15.10 Wyrażenie

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$ określonej na obszarze D, jeżeli w każdym punkcie tego obszaru spełnione są warunki:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

Twierdzenie 15.11 Niech funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na obszarze D. Wyrażenie

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

jest różniczką zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie obszaru D

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Definicja 15.11 Niech funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na obszarze D. Równanie postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

nazywamy równaniem różniczkowym zupełnym, jeżeli wyrażenie

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x,y)$ określonej na obszarze D.

Twierdzenie 15.12 Jeżeli wyrażenie $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x,y)$ określonej na obszarze D, to całka ogólna równania różniczkowego zupełnego

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

wyraża się wzorem:

$$F(x,y) = C$$

Definicja 15.12 Niech funkcje $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\mu(x,y)$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na obszarze D. Funkcję $\mu(x,y)$ nazywamy czynnikiem całkującym równania

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

jeżeli równanie

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

jest równaniem różniczkowym zupełnym.

Twierdzenie 15.13 Jeżeli

$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = f(x),$$

to

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

jest czynnikiem całkującym równania różniczkowego $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$.

Twierdzenie 15.14 Jeżeli

$$\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = q(y),$$

to

$$\mu(y) = e^{\int q(y)dy}$$

jest czynnikiem całkującym równania różniczkowego $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$.

16 Równania różniczkowe wyższych rzędów

16.1 Podstawowe definicje

Definicja 16.1 Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje jej pochodna rzędu n. Równanie to można w szczególnych przypadkach sprowadzić do postaci normalnej

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Definicja 16.2 Funkcję $y(x)$ nazywamy rozwiązaniem na przedziale (a, b) równania różniczkowego $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, jeżeli na tym przedziale jest ona n-krotnie różniczkowalna i zamienia to równanie w tożsamość

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy jego krzywą całkową.

Definicja 16.3 Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ nazywamy wyrażenie

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

które dla dowolnych wartości parametrów $C_1, C_2, \dots, C_n$ jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Definicja 16.4 Równanie różniczkowe

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

oraz warunek

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego.

Definicja 16.5 Funkcję $y(x)$ nazywamy rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

jeżeli jest rozwiązaniem równania

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

na pewnym przedziale zawierającym punkt x_0 i spełnia warunek $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

16.2 Równanie liniowe wyższych rzędów

Definicja 16.6 Równanie różniczkowe rzędu n postaci

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

nazywamy równaniem liniowym. Jeżeli $q(x) \not\equiv 0$, to równanie nazywamy liniowym niejednorodnym. W przeciwnym przypadku nazywamy je liniowym jednorodnym.

Twierdzenie 16.1 Jeżeli funkcje $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b) oraz $x_0 \in (a, b)$,
$y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in R$, to zagadnienie początkowe

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

16.2.1 Równanie różniczkowe liniowe jednorodne

Twierdzenie 16.2 Jeżeli funkcje $y_1(x)$ $y_2(x)$ są rozwiązaniami równania liniowego jednorodnego, to dla dowolnych $\alpha, \beta \in R$ funkcja

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

jest także rozwiązaniem tego równania.

Definicja 16.7 Ciąg $\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big)$ n rozwiązań równania liniowego jednorodnego rzędu n określonych na przedziale (a, b) nazywamy układem fundamentalnym tego równania na tym przedziale, jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ spełniony jest warunek

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Wyznacznik $W(x)$ nazywamy wrońskianem tego układu funkcji.

Twierdzenie 16.3 Niech $\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big)$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego rzędu n. Wtedy całka ogólna tego równania wyraża się wzorem

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

Definicja 16.8 Równanie

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x),$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n \in R$, nazywamy równaniem liniowym rzędu n o stałych współczynnikach. Jeżeli $q(x) \not\equiv 0$, to równanie nazywamy liniowym niejednorodnym. W przeciwnym przypadku nazywamy je liniowym jednorodnym.

Definicja 16.9 Równanie

$$r^n + p_1 r^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} r + p_n = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym równania liniowego rzędu n o stałych współczynnikach a wielomian stojący po jego prawej stronie nazywamy wielomianem charakterystycznym.

Twierdzenie 16.4 Jeżeli wielomian charakterystyczny równania liniowego rzędu n o stałych współczynnikach ma s różnych pierwiastków rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_s$ o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_s$ oraz m różnych pierwiastków zespolonych
$\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_m + i\beta_m$, gdzie $\beta_j > 0$ dla $1 \leq j \leq m$, o krotnościach odpowiednio $l_1, l_2, \ldots, l_m$, przy czym $k_1 + \ldots + k_s + 2(l_1 + \ldots + l_m) = n$, to układ fundamentalny tego równania tworzą funkcje

$$\begin{array}{l}
e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k_1 - 1} e^{r_1 x}, \\
e^{r_2 x}, xe^{r_2 x}, \ldots, x^{k_2 - 1} e^{r_2 x}, \\
\ldots\ldots \\
e^{r_s x}, xe^{r_s x}, \ldots, x^{k_s - 1} e^{r_s x}, \\
\begin{cases} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \\ xe^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x \end{cases}, \ldots, \begin{cases} x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \\ x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x \end{cases} \\
\begin{cases} e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x \\ e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x \\ xe^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x \end{cases}, \ldots, \begin{cases} x^{l_2 - 1} e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x \\ x^{l_2 - 1} e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x \end{cases} \\
\ldots\ldots \\
\begin{cases} e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x \\ e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha_m x} \cos \beta_m x \\ xe^{\alpha_m x} \sin \beta_m x \end{cases}, \ldots, \begin{cases} x^{l_m - 1} e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x \\ x^{l_m - 1} e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x \end{cases}
\end{array}$$

16.2.2 Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

Twierdzenie 16.5 Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

jest sumą dowolnego rozwiązania szczególnego tego równania i rozwiązania ogólnego równania liniowego jednorodnego

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

Twierdzenie 16.6 (metoda uzmienniania stałych)
Niech $\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big)$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego rzędu n

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

to rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego rzędu n

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x),$$

wyraża się wzorem

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

gdzie $(C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x))$ jest dowolnym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 16.7 (metoda przewidywań) Jeżeli prawa strona równania różniczkowego niejednorodnego rzędu n o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q(x),$$

ma postać

$$q(x) = e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x),$$

gdzie $R_k(x), S_l(x)$ są wielomianami stopnia odpowiednio k i l, to rozwiązanie szczególne tego równania wyraża się wzorem

$$y(x) = x^t e^{\alpha x}(T_m(x)\cos\beta x + U_m(x)\sin\beta x),$$

gdzie $m = \max\{k, l\}$, $T_m(x), U_m(x)$ są pewnymi wielomianami stopnia nie większego niż m oraz t jest krotnością liczby $\alpha+\beta i$ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego równania różniczkowego

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

Twierdzenie 16.8 Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są rozwiązaniami szczególnymi odpowiednio równań

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x)$$

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = r(x)$$

to funkcja

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

jest rozwiązaniem równania

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x) + r(x)$$

17 Szeregi liczbowe i funkcyjne

17.1 Podstawowe definicje i twierdzenia

Definicja 17.1 Dany jest ciąg liczbowy (a_n), gdzie $a_n \in R$. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ciąg (S_n) nazywamy szeregiem liczbowym i oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

lub

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem szeregu, a liczbę S_n - n-tą sumą częściową tego szeregu.

Definicja 17.2 Jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, gdzie $S \in R$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym a liczbę S nazywamy sumą szeregu. W przeciwnym wypadku szereg nazywamy rozbieżnym.

Twierdzenie 17.1 Szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

jest zbieżny dla $|q| < 1$ i rozbieżny dla $|q| \geq 1$

Twierdzenie 17.2 Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny dla $\alpha > 1$ oraz rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.

Twierdzenie 17.3 (warunek konieczny zbieżności szeregu) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

17.2 Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych

Twierdzenie 17.4 (kryterium d'Alemberta) Niech $a_n > 0$ dla każdego $n \in N$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Jeżeli $q < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Jeżeli $1 < q \leq \infty$, to szereg jest rozbieżny. Dla $q = 1$ kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga o zbieżności szeregu.

Twierdzenie 17.5 (kryterium Cauchy'ego) Niech $a_n \geq 0$ dla każdego $n \in N$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

Jeżeli $q < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Jeżeli $1 < q \leq \infty$, to szereg jest rozbieżny. Dla $q = 1$ kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga o zbieżności szeregu.

Twierdzenie 17.6 (kryterium porównawcze) Niech

$$\exists_{n_0} \quad \forall_{n\geq n_0} \quad 0 \leq a_n \leq b_n$$

Wówczas

1. jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest też zbieżny
2. jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest też rozbieżny

Twierdzenie 17.7 (kryterium ilorazowe) Niech $a_n, b_n > 0$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad \text{gdzie} \quad 0 < k < \infty$$

Wówczas szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Twierdzenie 17.8 (kryterium całkowe) Niech funkcja f będzie nieujemna oraz nierosnąca na przedziale $\langle n_0, \infty)$, gdzie $n_0 \in N$. Wówczas

$$\text{szereg} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \quad \text{i całka} \quad \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

17.3 Szeregi o wyrazach dowolnych

Twierdzenie 17.9 (kryterium Leibniza) Jeżeli

1. ciąg (a_n) jest nierosnący
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

to szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Definicja 17.3 Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym bezwzględnie, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Twierdzenie 17.10 Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Definicja 17.4 Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy szeregiem zbieżnym warunkowo.

17.4 Szeregi potęgowe

Definicja 17.5 Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in R$ i współczynnikach $a_n \in R$ nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad \text{gdzie} \quad x \in R$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $(x-x_0)^0 = 1$ dla $x = x_0$.

Definicja 17.6 Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazywamy liczbę R określoną wzorem:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dla } q = \infty \\ \frac{1}{q} & \text{dla } 0 < q < \infty \\ \infty & \text{dla } q = 0 \end{cases},$$

gdzie $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Promień zbieżności można wyznaczyć także przyjmując $q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

Twierdzenie 17.11 (Cauchy'ego - Hadamarda) Niech $0 < R < \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Wtedy szereg ten jest:

1. zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie przedziału (x_0-R, x_0+R)
2. rozbieżny w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0-R) \cup (x_0+R, \infty)$

Jeżeli $R = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny jedynie w punkcie x_0. Jeżeli $R = \infty$, to szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie na całej prostej.

Definicja 17.7 Przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ to zbiór $x \in R$, dla których jest on zbieżny.

Twierdzenie 17.12 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu $O(x_0)$ n-tą pochodną, to dla każdego $x \in O(x_0)$ istnieje punkt c taki, że zachodzi równość

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

gdzie $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Definicja 17.8 Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną dowolnego rzędu. Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazywamy szeregiem Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0. Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg ten nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f.

Twierdzenie 17.13 Jeżeli

1. funkcja f ma na otoczeniu $O(x_0)$ pochodne dowolnego rzędu
2. dla każdego $x \in O(x_0)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, gdzie $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$ oznacza n-tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f

to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{dla każdego} \quad x \in O(x_0)$$

Twierdzenie 17.14 Niech $0 < R \leq \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Wtedy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

dla każdego $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Twierdzenie 17.15 Niech $0 < R \leq \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Wtedy

$$\int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

dla każdego $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

17.5 Szeregi Fouriera

Definicja 17.9 Szeregiem trygonometrycznym na przedziale $< -\pi, \pi >$ nazywamy szereg postaci:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie $a_0 \in R$ oraz $a_n, b_n \in R$ dla $n \in N$.

Definicja 17.10 Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $< -\pi, \pi >$. Szeregiem Fouriera tej funkcji nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Definicja 17.11 Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $< -l, l >$. Szeregiem Fouriera tej funkcji nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Twierdzenie 17.16

1. Jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Twierdzenie 17.17 (kryterium Dirichleta) Jeżeli funkcja $f :< -\pi, \pi > \longrightarrow R$ jest

1. przedziałami monotoniczna
2. przedziałami ciągła, przy czym w każdym punkcie nieciągłości x_0 spełnia warunek

$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-) + f(x_0+)]$$

a na końcach przedziału zachodzą równości

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi-) + f(-\pi+)]$$

to funkcja f jest sumą swego szeregu Fouriera, tzn. dla każdego $x \in < -\pi, \pi >$ mamy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$