Spis treści

1 Rachunek zdań

Definicja 1.1 *Zdaniem* w logice nazywamy wypowiedź oznajmującą i sensowną, tj. taką, której w ramach danej nauki można przypisać ocenę prawdziwości albo fałszu i tylko jedną z tych dwóch ocen. Ocenę prawdziwości oznaczamy cyfrą 1, ocenę fałszu cyfra 0. Zdania oznaczamy literami $p, q, r, \ldots$.

Definicja 1.2 Literę, która może oznaczać dowolne zdanie (z zakresu danej nauki) nazywamy *zmienną zdaniową*.

Definicja 1.3 *Spójniki logiczne (funktory):*

1. nie $\sim$
2. i $\wedge$
3. lub $\vee$
4. implikuje $\Rightarrow$
5. jest równoważne $\Leftrightarrow$

Definicja 1.4 *Zdanie złożone* w logice tworzymy ze zdań składowych za pomocą spójników logicznych.

Definicja 1.5 *Prawem rachunku zdań (tautologią)* nazywamy wyrażenie, które staje się zdaniem prawdziwym, gdy w miejscach zmiennych zdaniowych podstawimy dowolne zdania.

Przykładowe tautologie:

1. prawo podwójnego zaprzeczenia

$$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$$

2. prawo wyłączonego środka

$$p \vee (\sim p)$$

3. prawo sprzeczności

$$\sim [p \wedge (\sim p)]$$

4. łączność koniunkcji

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

5. łączność alternatywy

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

6. rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

7. rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

8. prawo przechodniości implikacji

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

9. prawo kontrapozycji

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

10. prawo zaprzeczenia implikacji

$$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$$

11. prawo zaprzeczenia alternatywy

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

12. prawo zaprzeczenia koniunkcji

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$$

13. prawo Dunsta-Scotusa

$$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

2 Funkcje liczbowe

Definicja 2.1 Niech zbiory $X, Y \subset R$ będą niepuste. *Funkcją* określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$ i oznaczamy przez

$$f : X \longrightarrow Y$$

Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja 2.2 Niech $f : X \longrightarrow Y$. Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f i oznaczamy symbolem D_f. Zbiór Y nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji f a zbiór

$$\left\{y \in Y : \exists_{x \in D_f} \quad y = f(x)\right\}$$

nazywamy *zbiorem wartości*.

Definicja 2.3 Funkcje $f : D_f \longrightarrow Y$ oraz $g : D_g \longrightarrow Y$ są *równe*, jeżeli

$$D_f = D_g \quad \wedge \quad \forall_{x \in D_f} \quad f(x) = g(x)$$

Definicja 2.4 *Wykresem* funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\left\{(x, y) \in R^2 : x \in X, y = f(x)\right\}$$

Definicja 2.5 Funkcja f odwzorowuje zbiór X *na* zbiór Y, jeżeli

$$\forall_{y \in Y} \quad \exists_{x \in X} \quad f(x) = y.$$

Piszemy wtedy $f : X \xrightarrow{na} Y$.

Definicja 2.6 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *okresową*, jeżeli

$$\exists_{T>0} \quad \forall_{x \in X} \quad x + T \in X \quad \wedge \quad f(x + T) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy *okresem* funkcji f. Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji f, to nazywamy go okresem *podstawowym*.

Definicja 2.7 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *parzystą*, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$$

Definicja 2.8 Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *nieparzystą*, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$$

Definicja 2.9 Funkcja f jest *ograniczona z dołu* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{m \in R} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \geq m.$$

Definicja 2.10 Funkcja f jest *ograniczona z góry* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{M \in R} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \leq M.$$

Definicja 2.11 Funkcja f jest *ograniczona* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{m,M \in R} \quad \forall_{x \in A} \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Definicja 2.12 Funkcja f jest *rosnąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)].$$

Definicja 2.13 Funkcja f jest *malejąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)].$$

Definicja 2.14 Funkcja f jest *niemalejąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)].$$

Definicja 2.15 Funkcja f jest *nierosnąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)].$$

Definicja 2.16 Niech $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Z \longrightarrow W$, gdzie $Y \subset Z$. *Złożeniem funkcji* g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \longrightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Definicja 2.17 Funkcja f jest *różnowartościowa* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Definicja 2.18 Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. *Funkcję odwrotną* do funkcji f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ spełniającą warunek:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

gdzie $x \in X, y \in Y$.

Twierdzenie 2.1 Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Wtedy

$$\forall_{x\in X} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y\in Y} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Definicja 2.19

1. Funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy *arcus sinus* i oznaczamy przez arcsin.
2. Funkcję odwrotną do funkcji cosinus obciętej do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ nazywamy *arcus cosinus* i oznaczamy przez arccos.
3. Funkcję odwrotną do funkcji tangens obciętej do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy *arcus tangens* i oznaczamy przez arctg.
4. Funkcję odwrotną do funkcji cotangens obciętej do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ nazywamy *arcus cotangens* i oznaczamy przez arcctg.

3 Ciągi liczbowe

Definicja 3.1 *Ciągiem* nazywamy funkcję $f : N \longrightarrow R$. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej $n \in N$ będziemy nazywać *n-tym wyrazem ciągu* i oznaczać przez a_n, tzn. $f(n) = a_n$. Sam ciąg oznaczać będziemy symbolem (a_n).

Definicja 3.2 Ciąg (a_n) jest *ograniczony z dołu*, jeżeli

$$\exists_{m \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad a_n \geq m.$$

Definicja 3.3 Ciąg (a_n) jest *ograniczony z góry*, jeżeli

$$\exists_{M \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad a_n \leq M.$$

Definicja 3.4 Ciąg (a_n) jest *ograniczony*, jeżeli

$$\exists_{m,M \in R} \quad \forall_{n \in N} \quad m \leq a_n \leq M.$$

Definicja 3.5 Ciąg (a_n) jest *rosnący*, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Definicja 3.6 Ciąg (a_n) jest *malejący*, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n > a_{n+1}.$$

Definicja 3.7 Ciąg (a_n) jest *niemalejący*, jeżeli

$$\forall_{n \in N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Definicja 3.8 Ciąg (a_n) jest *nierosnący*, jeżeli

$$\forall_{n\in N} \quad a_n \geq a_{n+1}.$$

3.1 Granica właściwa ciągu

Definicja 3.9 Ciąg (a_n) jest *zbieżny do granicy właściwej* $a \in R$, co zapisujemy

$$a_n \to a \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

jeżeli

$$\forall_{\epsilon>0} \quad \exists_{n_0\in N} \quad \forall_{n>n_0} \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Twierdzenie 3.1 Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są zbieżne do granicy właściwej, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, o ile $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Twierdzenie 3.2 Jeżeli ciąg jest zbieżny, to ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie 3.3 Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Twierdzenie 3.4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Twierdzenie 3.5

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Twierdzenie 3.6 Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz ciąg (b_n) jest ograniczony, to $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Twierdzenie 3.7 *(o trzech ciągach)*Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0\in N} \quad \forall_{n\geq n_0} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$,

to $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Twierdzenie 3.8 Jeżeli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.

3.2 Granica niewłaściwa ciągu

Definicja 3.10 Ciąg (a_n) ma *granicę niewłaściwej* ∞ (odpowiednio do $-\infty$), co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\text{odp.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty),$$

jeżeli

$$\forall_{A\in R} \quad \exists_{n_0\in N} \quad \forall_{n>n_0} \quad a_n > A$$
$$(\text{odp.} \quad \forall_{A\in R} \quad \exists_{n_0\in N} \quad \forall_{n>n_0} \quad a_n < A)$$

Twierdzenie 3.9 Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0\in N} \quad \forall_{n\geq n_0} \quad a_n \leq b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (odpowiednio $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$)

to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (odp. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

Definicja 3.11 Wyrażenia

$$[\infty - \infty], [0 \cdot \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [1^{\infty}], [0^0], [\infty^0]$$

nazywamy *wyrażeniami nieoznaczonymi*. Ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

3.3 Granice pewnych ciągów

Twierdzenie 3.10 Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony.

Twierdzenie 3.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$

gdzie $e \approx 2,718281828459045$

Twierdzenie 3.12

$$\lim_{n\to\infty} a^n \begin{cases} = 0 & \text{dla } a \in (-1, 1) \\ = 1 & \text{dla } a = 1 \\ = \infty & \text{dla } a \in (1, \infty) \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } a \in (-\infty, -1\rangle \end{cases}$$

Twierdzenie 3.13

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$

4 Granice funkcji

4.1 Podstawowe definicje

Definicja 4.1

1. *Sąsiedztwem lewostronnym* punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
2. *Sąsiedztwem prawostronnym* punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.
3. *Sąsiedztwem* punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $S(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0,$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Definicja 4.2

1. *Sąsiedztwem* ∞ nazywamy przedział $S(\infty) = (a, \infty)$ dla dowolnego $a \in R$.
2. *Sąsiedztwem* $-\infty$ nazywamy przedział $S(-\infty) = (-\infty, a)$ dla dowolnego $a \in R$.

Definicja 4.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Liczba g jest *granicą właściwą* funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 4.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa lewostronnego $S_-(x_0)$. Liczba g jest *granicą właściwą lewostronną* funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S_-(x_0)} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 4.5 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa prawostronnego $S_+(x_0)$. Liczba g jest *granicą właściwą prawostronną* funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S_+(x_0)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 4.6 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Funkcja f ma *granicę niewłaściwą* ∞ w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

Definicja 4.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(x_0)$. Funkcja f ma *granicę niewłaściwą* $-\infty$ w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Twierdzenie 4.1 Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji f.

Twierdzenie 4.2 Jeżeli

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$, gdzie $x'_n \neq x_0$ dla każdego $n \in R$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$, gdzie $x''_n \neq x_0$ dla każdego $n \in R$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

Definicja 4.8 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(\infty)$. Liczba g jest *granicą właściwą funkcji* f *w* ∞, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 4.9 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(-\infty)$. Liczba g jest *granicą właściwą funkcji* f *w* $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(-\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Definicja 4.10 Niech funkcja f będzie określona dla pewnego sąsiedztwa $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ *granicę niewłaściwą* ∞, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\subset S(\infty)} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

Twierdzenie 4.3 Jeżeli

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$
3. $g' \neq g''$,

to granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje (właściwa lub niewłaściwa).

4.2 Twierdzenia o granicach funkcji

Twierdzenie 4.4 Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdzie $c \in R$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Twierdzenie 4.5 Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0)$
3. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = q$

to

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = q$$

Twierdzenie 4.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Twierdzenie 4.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a > 0$

Twierdzenie 4.8 Jeżeli istnieje funkcja odwrotna do funkcji g w pewnym otoczeniu $S(x_0)$, to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to g(x_0)} f(g^{-1}(t))$$

4.3 Asymptoty funkcji

Definicja 4.11 Prosta $x = a$ jest *asymptotą pionową lewostronną* funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

Definicja 4.12 Prosta $x = a$ jest *asymptotą pionową prawostronną* funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

Definicja 4.13 Prosta jest *asymptotą pionową obustronną* funkcji, jeżeli jest asymptotą pionową prawostronną i lewostronną.

Definicja 4.14 Prosta $y = b$ jest *asymptotą poziomą lewostronną* funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Definicja 4.15 Prosta $y = b$ jest *asymptotą poziomą prawostronną* funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

Definicja 4.16 Prosta jest *asymptotą poziomą obustronną* funkcji, jeżeli jest asymptotą poziomą prawostronną i lewostronną.

Definicja 4.17 Prosta $y = ax+b$ jest *asymptotą ukośną lewostronną* funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Definicja 4.18 Prosta $y = ax + b$ jest *asymptotą ukośną prawostronną* funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Twierdzenie 4.9 Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$

$$\left(a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]\right)$$

5 Ciągłość funkcji

5.1 Podstawowe definicje

Definicja 5.1

1. *Otoczeniem lewostronnym* punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$ dla dowolnego $\delta > 0$.
2. *Otoczeniem prawostronnym* $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O_+(x_0) = [x_0, x_0 +$ dla dowolnego $\delta > 0$.
3. *Otoczeniem* punktu $x_0 \in R$ nazywamy przedział $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Definicja 5.2 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 5.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia lewostronnego $O_-(x_0)$. Funkcja f jest *lewostronnie ciągła* w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Definicja 5.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia prawostronnego $O_+(x_0)$. Funkcja f jest *prawostronnie ciągła* w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Twierdzenie 5.1 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w x_0.

Definicja 5.5 Funkcja jest *ciągła na zbiorze*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 5.6 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 *nieciągłość I rodzaju*, jeżeli istnieją granice skończone $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Definicja 5.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 *nieciągłość II rodzaju*, jeżeli co najmniej jedna z granic $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ nie istnieje lub jest niewłaściwa.

5.2 Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie 5.2 Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to ciągłe są w punkcie x_0 także funkcje: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz funkcja $\frac{f}{g}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 5.3 Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$

to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie 5.4 Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

5.3 Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie 5.5 *(Weierstrassa)* Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to jest na tym przedziale ograniczona.

Twierdzenie 5.6 *(Darboux)* Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\forall_{w \in (f(a), f(b))} \quad \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = w$$

Wniosek 5.1 *(Darboux)* Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, to

$$\exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = 0$$

6 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

6.1 Podstawowe definicje

Definicja 6.1 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. *Ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx zmiennej niezależnej, gdzie $\Delta x \neq 0$ oraz $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$, nazywamy liczbę

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 6.2 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. *Pochodną właściwą funkcji* f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 6.3 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego lewostronnego otoczenia $O_-(x_0)$. *Pochodną lewostronną właściwą* funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 6.4 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego prawostronnego otoczenia $O_+(x_0)$. *Pochodną prawostronną właściwą* funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Twierdzenie 6.1 Funkcja ma pochodna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Twierdzenie 6.2 Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

Definicja 6.5 Funkcja ma pochodną właściwą na zbiorze, jeżeli ma pochodna w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 6.6 Niech f będzie ciągła w punkcie x_0. Funkcja ma *pochodną niewłaściwą* w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

6.2 Twierdzenia o pochodnej funkcji

Twierdzenie 6.3 Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to

1. $[f+g]'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $[cf]'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie $c \in R$
3. $[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left[\frac{f}{g}\right]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, o ile $g(x_0) \neq 0$

Twierdzenie 6.4 Jeżeli

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0
2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$

to

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Twierdzenie 6.5 Jeżeli funkcja f ma następujące własności:

1. jest ciągła w otoczeniu $O(x_0)$
2. jest malejąca lub rosnąca na otoczeniu $O(x_0)$
3. ma pochodną właściwą $f'(x_0)$

to

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{gdzie} \quad y_0 = f(x_0)$$

6.3 Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Definicja 6.7 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Prosta jest *styczną* do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji f przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$, gdy $x \longrightarrow x_0$.

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Jeżeli α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i dodatnią półosią Ox, to

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

Jeżeli α_+ oraz α_- oznaczają odpowiednio kąty między prawą i lewą stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ a dodatnią półosią Ox, to

$$f'_+(x_0) = tg\alpha_+ \quad \text{oraz} \quad f'_-(x_0) = tg\alpha_-$$

Twierdzenie 6.6 Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

6.4 Różniczka funkcji

Definicja 6.8 Niech funkcja f ma pochodna właściwą w punkcie x_0. *Różniczką funkcji f* w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Twierdzenie 6.7 Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Błąd jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej niezależnej Δx, tzn.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$$

6.5 Pochodne wyższych rzędów

Definicja 6.9 *Pochodną właściwą n-tego rzędu* funkcji f w punkcie x_0 definiujemy rekurencyjnie:

1. $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$
2. $f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0)$ dla $n \geq 2$

Dodatkowo przyjmujemy, że $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Twierdzenie 6.8 *(Leibniza)* Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

6.6 Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 6.9 *(Rolle'a)* Jeżeli funkcja f:

1. jest ciągła na $[a, b]$
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0$$

Twierdzenie 6.10 *(Lagrange'a)* Jeżeli funkcja f

1. jest ciągła na $[a, b]$
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b)

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wnioski z tw. Lagrange'a

Wniosek 6.1 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) = 0,$$

to jest stała na przedziale (a, b).

Wniosek 6.2 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) > 0,$$

to jest rosnąca na przedziale (a, b).

Wniosek 6.3 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f'(x) < 0,$$

to jest malejąca na przedziale (a, b).

6.7 Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie 6.11 Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$
2. istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6.8 Rozwinięcie Taylora funkcji

Twierdzenie 6.12 *(wzór Taylora z resztą Lagrange'a)* Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu $O(x_0)$ n-tą pochodną, to dla każdego $x \in O(x_0)$ istnieje punkt c taki, że zachodzi równość

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(x - x_0)^n, \end{gathered}$$

gdzie $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

6.9 Ekstrema funkcji

Definicja 6.10 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ *minimum lokalne* , jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Definicja 6.11 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Definicja 6.12 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ minimum lokalne *właściwe*, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) > f(x_0)$$

Definicja 6.13 Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ maksimum lokalne *właściwe*, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) < f(x_0)$$

Definicja 6.14 Liczba $m \in R$ jest *najmniejszą wartością funkcji* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{x_0 \in A} \quad f(x_0) = m \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \geq m$$

Definicja 6.15 Liczba $M \in R$ jest *największą wartością funkcji* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\exists_{x_0 \in A} \quad f(x_0) = M \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in A} \quad f(x) \leq M$$

Twierdzenie 6.13 *(Fermata)* Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. ma ekstremum lokalne w x_0
2. istnieje $f'(x_0)$

to

$$f'(x_0) = 0$$

Twierdzenie 6.14 Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których jej pochodna równa się zero albo w punktach, w których jej pochodna nie istnieje.

Twierdzenie 6.15 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f'(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f'(x) < 0$$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 6.16 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f'(x) < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f'(x) > 0$$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 6.17 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 6.18 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) > 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 6.19 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to w punkcie x_0 nie ma ekstremum lokalnego.

6.10 Punkty przegięcia funkcji

Definicja 6.16 Funkcja f jest *wklęsła* na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 6.17 Funkcja f jest *wypukła* na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 6.18 Funkcja f jest *ściśle wklęsła* na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definicja 6.19 Funkcja f jest *ściśle wypukła* na przedziale (a, b), jeżeli dla dowolnych x_1, x, x_2 spełniających nierówność $a < x_1 < x < x_2 < b$ zachodzi

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Twierdzenie 6.20 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f''(x) > 0,$$

to jest ściśle wypukła na przedziale (a, b).

Twierdzenie 6.21 Jeżeli funkcja f spełnia warunek

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad f''(x) < 0,$$

to jest ściśle wklęsła na przedziale (a, b).

Definicja 6.20 Niech $x_0 \in R$ oraz niech funkcja f będzie określona dla pewnego otoczenia $O(x_0)$. Niech funkcja f ma pochodną na $O(x_0)$. Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest *punktem przegięcia* funkcji f, jeżeli istnieje sąsiedztwo lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że f jest ściśle wypukła na $S_-(x_0)$ oraz ściśle wklęsła na $S_+(x_0)$ albo odwrotnie.

Twierdzenie 6.22 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia
2. istnieje $f''(x_0)$

to

$$f''(x_0) = 0$$

Twierdzenie 6.23 Funkcja może mieć punkty przegięcia tylko w punktach, w których jej druga pochodna równa się zero albo w punktach, w których ta pochodna nie istnieje.

Twierdzenie 6.24 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = 0$
2. istnieją sąsiedztwa lewostronne $S_-(x_0)$ i prawostronne $S_+(x_0)$ takie, że

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f''(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f''(x) < 0$$

lub

$$\forall_{x \in S_-(x_0)} \quad f''(x) < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in S_+(x_0)} \quad f''(x) > 0$$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie 6.25 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą nieparzystą, gdzie $n \geq 3$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie 6.26 Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 4$

to punkt $(x_0, f(x_0))$ nie jest punktem przegięcia funkcji f.

6.11 Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. Dziedzina funkcji.
2. Podstawowe własności funkcji:
   - parzystość lub nieparzystość
   - okresowość
   - punkty przecięcia wykresu z osiami Ox i Oy
   - ciągłość
3. Granice lub wartości funkcji na „końcach” dziedziny.
4. Asymptoty funkcji.
5. Pierwsza pochodna funkcji:
   - dziedzina pochodnej
   - przedziały monotoniczności funkcji
   - ekstrema funkcji
   - granice lub wartości funkcji na „końcach” dziedziny pochodnej
6. Druga pochodna funkcji:
   - dziedzina drugiej pochodnej
   - przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji
   - punkty przegięcia
7. Tabelka.
8. Wykres funkcji.

7 Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

7.1 Podstawowe definicje

Definicja 7.1 Funkcja F jest funkcją *pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$\forall_{x \in I} \quad F'(x) = f(x)$$

Twierdzenie 7.1 Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy

1. $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in R$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I
2. każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + C$, gdzie $C \in R$

Twierdzenie 7.2 Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Definicja 7.2 Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. *Całką nieoznaczoną* funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C : C \in R\}$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)dx$

Twierdzenie 7.3 Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy

$$\forall_{x \in I} \quad \left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

Twierdzenie 7.4 Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy

$$\forall_{x\in I} \quad \int f'(x)dx = f(x) + C,$$

gdzie $C \in R$.

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9 $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$

11. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

7.2 Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie 7.5 Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

1. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
3. $\int (cf(x))\, dx = c \int f(x)dx$, gdzie $c \in R$

Twierdzenie 7.6 (o całkowaniu przez części) Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne, to

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Twierdzenie 7.7 (o całkowaniu przez podstawienie) Jeżeli

1. funkcja $f : I \longrightarrow R$ jest ciągła na przedziale I
2. funkcja $g : J \longrightarrow I$ ma ciągłą pochodną na przedziale I,

to

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

7.3 Całkowanie funkcji wymiernych

Twierdzenie 7.8 (całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju)

$$\int \frac{Adx}{ax+b} = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{Adx}{(ax+b)^n} = -\frac{A}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$$

Twierdzenie 7.9

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + C, \quad n \geq 2$$

Twierdzenie 7.10 (całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju)

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{P}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

7.4 Całkowanie funkcji niewymiernych

Twierdzenie 7.11

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C, \quad \text{gdzie} \quad k \neq 0$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2+k} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \neq 0$$

Twierdzenie 7.12 (metoda współczynników nieoznaczonych)

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

7.5 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Twierdzenie 7.13

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

Definicja 7.3 Funkcję, którą można przedstawić w postaci ilorazu wielomianów dwóch zmiennych, nazywamy *funkcją wymierną dwóch zmiennych.*

Twierdzenie 7.14 Niech $R(u,v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Wówczas do obliczania całek postaci

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

w zależności od warunków jakie spełnia funkcja R, stosuje się podstawienia:

1. $R(-u,v) = -R(u,v)$,

$$t = \cos x \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

2. $R(u,-v) = -R(u,v)$,

$$t = \sin x \quad \cos x = \sqrt{1-t^2} \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3. $R(-u, -v) = R(u, v)$,

$$t = tgx \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4. R - dowolna funkcja,

$$t = tg\frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

7.6 Całki oznaczone

Definicja 7.4 *Podziałem odcinka* $[a, b]$ na n części, gdzie $n \in N$, nazywamy zbiór
$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$
gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Definicja 7.5 Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$ oraz niech P będzie podziałem tego przedziału. *Sumą całkową funkcji* f odpowiadającą podziałowi P oraz punktom pośrednim ξ_k, gdzie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ oraz $1 \leq k \leq n$, tego podziału nazywamy liczbę

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \text{gdzie} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Definicja 7.6 Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. *Całkę oznaczoną Riemanna* z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P)\longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

gdzie $\delta(P) = \max\limits_{1\leq k\leq n}\{\Delta x_k\}$, o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposobu podziałów P przedziału

$[a, b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich ξ_k. Ponadto przyjmujemy

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{dla} \quad a < b$$

Twierdzenie 7.15 Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę nieciągłości I rodzaju, to jest na nim całkowalna.

Twierdzenie 7.16 *(Newtona - Leibniza)* Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcje pierwotną funkcji f na tym przedziale.

7.7 Twierdzenia o całkach oznaczonych

Twierdzenie 7.17 Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad \text{gdzie} \quad c \in R$

Twierdzenie 7.18 (o całkowaniu przez części) Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$$

Twierdzenie 7.19 (o całkowaniu przez podstawienie) Jeżeli

1. funkcja $f : [a, b] \longrightarrow R$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$
2. funkcja $g : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$,
3. $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$

to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Twierdzenie 7.20 Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz niech funkcja g różni się od funkcji f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy funkcja g jest także całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Twierdzenie 7.21 Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz $c \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7.8 Całki niewłaściwe

Twierdzenie 7.22 Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty)$. *Całkę niewłaściwą I rodzaju* funkcji f na $[a, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)dx$$

Jeżeli granica jest właściwa, to mówimy, że całka jest *zbieżna*. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest *rozbieżna* odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest *rozbieżna*.

Twierdzenie 7.23 Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, b]$. *Całkę niewłaściwą I rodzaju* funkcji f na $(-\infty, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{T\to-\infty} \int\limits_{T}^{b} f(x)dx$$

Twierdzenie 7.24 Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. *Całkę niewłaściwą I rodzaju* funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

gdzie a jest dowolna liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie 7.25 Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie $S_+(a)$. *Całkę niewłaściwą II rodzaju* funkcji f na $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

Twierdzenie 7.26 Niech funkcja f określona na przedziale $[a, b)$ będzie nieograniczona na lewostronnym sąsiedztwie $S_-(b)$. *Całkę niewłaściwą II rodzaju* funkcji f na $[a, b)$ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Twierdzenie 7.27 Niech funkcja f określona na zbiorze $[a,c) \cup (c,b]$ będzie nieograniczona na sąsiedztwie $S_-(c)$, $S_+(c)$. *Całkę niewłaściwą II rodzaju* funkcji f na $[a,b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7.9 Zastosowanie całek oznaczonych

Twierdzenie 7.28

1. Niech funkcje f i g będą ciągłe na przedziale $[a,b]$ oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

2. Niech funkcje k i h będą ciągłe na przedziale $[c,d]$ oraz niech $k(y) \leq h(y)$ dla każdego $y \in [c,d]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresami funkcji k i h oraz prostymi $y = c$, $y = d$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_c^d [h(y) - k(y)]dy$$

Twierdzenie 7.29 Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$. Wtedy długość krzywej $\{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Twierdzenie 7.30

1. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Ox wyraża się wzorem:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

2. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Oy wyraża się wzorem:
$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Twierdzenie 7.31

1. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:
$$L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

2. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Oy wyraża się wzorem:

$$L = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

8 Indeks